



**Estudo da Hidrodinâmica em torno do Recife Artificial para a prática do *Surf* a construir em São Pedro do Estoril, Cascais**  
**Aplicação dos Modelos de Boussinesq: COULWAVE e FUNWAVE \***  
*Hydrodynamic Study of an Artificial Surfing Reef to be constructed in S. Pedro do Estoril, Cascais.*  
*Boussinesq Model Application: COULWAVE and FUNWAVE*

Ana Mendonça @, <sup>1</sup>, Barbara Proença<sup>1</sup>, Conceição Juana Fortes<sup>1</sup>, Maria Graça Neves<sup>1</sup>

---

RESUMO

O presente artigo descreve a aplicação de dois códigos numéricos baseados nas equações de Boussinesq (FUNWAVE e COULWAVE) ao estudo da hidrodinâmica em torno de um recife artificial para a prática do surf em São Pedro do Estoril, Cascais, Portugal. O objectivo é avaliar a forma como os códigos reproduzem a propagação e deformação de ondas sobre o recife e o funcionamento do recife para a prática do surf. Trata-se de um caso de estudo para o qual foram efectuados ensaios físicos tridimensionais no LNEC para a Câmara Municipal de Cascais, no âmbito de um estudo de viabilidade de implementação de um recife artificial para a prática do surf nesta zona, dispondo-se assim de um conjunto de resultados experimentais para a validação dos modelos numéricos.

A comparação dos resultados numéricos e experimentais foi realizada em termos das séries de elevação da superfície livre e das respectivas alturas de onda obtidas ao longo do domínio de cálculo, o que permitiu verificar que os modelos reproduzem bem a forma da elevação da superfície livre para as condições de agitação e nível de maré analisados. Determinaram-se também, e apenas com base nos resultados numéricos, os parâmetros de surfabilidade (ângulo de rebentação e tipo de rebentação) que caracterizam o funcionamento do recife para a prática do surf. Os resultados dos dois códigos, para as condições testadas, são bastante semelhantes, ambos prevendo para as condições testadas, tal como o modelo físico, que o recife induza boas condições para a prática de surf nesta zona.

Palavras-chave: Recifes artificiais, Surf, modelação numérica, modelação física, FUNWAVE, COULWAVE

---

@ - autor correspondente: amendonca@lneec.pt  
1 - LNEC, Av. do Brasil, 101, 1700-066 Lisboa, Portugal.

---

\* Submissão – 18 Maio 2009; Avaliação – 8 Junho 2009; Recepção da versão revista – 27 Outubro 2009; Disponibilização on-line - 23 Dezembro 2009

## ABSTRACT

The present paper describes the application of two numerical models based on the Boussinesq equations (FUNWAVE and COULWAVE) to the study of the hydrodynamics around an artificial reef for surf in São Pedro do Estoril, Cascais, Portugal. The main goal is to evaluate the way these models reproduce the propagation and deformation of waves travelling over the reef and its performance for surf. For this case study, three-dimensional physical tests, included in a viability study of the implementation of an artificial surfing reef in that area made to the Cascais Municipality, were done at LNEC, making available a set of experimental results for validation of the numerical models.

The comparison of the numerical and experimental results was done using time series of free surface elevation and the correspondent wave height obtained for the whole computational domain, which allows the evaluation of the capabilities and limitations of each model. Based on the numerical results, the surfability parameters (peel angle and break type) have also been determined in order to characterize the functionality of the artificial surfing reef. For the tested conditions, the model results are similar and give, in accordance with the physical model results, good surfing conditions for this reef location and geometry.

Keywords: Artificial reefs, surf waves, numerical modelling, physical modelling, FUNWAVE, COULWAVE

## 1. INTRODUÇÃO

O aumento da importância da prática de surf no concelho de Cascais nos últimos trinta anos incentivou a Câmara Municipal de Cascais (C.M.C.) a promover um estudo de viabilidade de implementação de um recife artificial para surf na zona da praia de São Pedro do Estoril. O recife a construir contribuiria para potenciar a prática de surf nesta área, tornando-a um local de preferência para a organização de campeonatos internacionais desta modalidade. Para este efeito, a C.M.C. formalizou, em 2006, um protocolo com o Instituto Superior Técnico e o Laboratório Nacional de Engenharia Civil (LNEC), que compreendia, como componentes principais, a modelação física e numérica da hidrodinâmica na zona do recife.

A componente de modelação numérica incluiu o estudo em modelo numérico do funcionamento de diversas soluções propostas para o recife, (Fortes et al., 2008a) e o estabelecimento da solução de recife a ser ensaiada em modelo físico. Este estudo, que incluiu várias soluções para a localização e geometria do recife, foi realizado através da utilização do modelo parabólico baseado na equação de mild-slope, REFDIF (Darlymple e Kirby, 1991).

Após a definição da geometria e localização do recife a ser ensaiada em modelo físico por Bicudo et al. (2007a, b), procedeu-se à construção quer do envolvente ao recife quer do próprio recife nos tanques do LNEC. Realizaram-se testes para diferentes condições de agitação incidente, regular e

irregular, de modo a avaliar as condições de rebentação sobre o recife. Procedeu-se à medição de parâmetros característicos da agitação marítima (nomeadamente, as alturas de onda) em 37 sondas situadas sobre e em torno do recife artificial e à filmagem dos ensaios de forma a registar as condições de rebentação (posição da rebentação e tipo de rebentação). Tal permitiu caracterizar as condições para as quais o recife é adequado para a prática do surf.

No seguimento do trabalho anterior, mas agora no âmbito do projecto de investigação em curso “Novos conceitos para a protecção costeira em Portugal” financiado pela Fundação para a Ciência e Tecnologia, julgou-se interessante aprofundar o estudo numérico, utilizando, em lugar do código REFDIF, que apresenta limitações (modelo linear e parabólico), modelos não lineares baseados na equação de Boussinesq que permitem uma melhor caracterização da hidrodinâmica em torno do recife artificial. A maior precisão destes modelos permite ter uma maior confiança nos seus resultados e, deste modo, contribuir para a definição de uma solução mais adequada a ser estudada em modelo físico. Note-se que o recurso à modelação física é importante neste tipo de estudos pois a complexidade de fenómenos presentes na rebentação sobre e após o recife não é convenientemente simulada presentemente por nenhum dos modelos numéricos da literatura. Em contrapartida, os modelos numéricos possibilitam um estudo mais alargado de soluções para o recife, necessário à optimização das características do recife artificial, com custos financeiros e duração muito

menores, comparativamente aos dos modelos físicos.

No âmbito da modelação numérica, os modelos baseados nas equações estendidas de Boussinesq permitem uma descrição mais precisa da evolução das ondas em zonas de profundidade variável, onde os efeitos da refacção, difracção e efeitos não lineares afectam a propagação das ondas.

São exemplos destes modelos, o código FUNWAVE, Kirby et al. (1998) e Chen et al. (2000), e o código COULWAVE, Lynett e Liu (2004). Ambos permitem reproduzir a maioria dos fenómenos intervenientes na transformação da onda em fundos de profundidade variável e na presença de correntes: dispersão de frequência, dispersão de amplitude, empolamento (linear e não-linear), difracção, refacção pelo fundo e devida às correntes, geração de harmónicas e dissipação de energia por rebentação da onda.

Embora os códigos sejam baseados no mesmo tipo de equações, i.e., equações de Boussinesq, a forma como essas equações foram deduzidas em cada código não é idêntica, o que conduziu a códigos com diferentes características de dispersão e não linearidade; a própria formulação da rebentação, que é comum aos dois códigos, apresenta diferenças no que diz respeito aos critérios de rebentação (início, fim e duração) implementados em cada um deles.

O presente trabalho consiste numa análise

comparativa do desempenho dos códigos FUNWAVE e COULWAVE na simulação da hidrodinâmica em torno do recife artificial em São Pedro do Estoril, utilizando, para tal análise, os resultados experimentais obtidos em modelo físico. Pretende-se ainda avaliar a influência das diferenças dos códigos nos resultados dos parâmetros de surfabilidade e consequentemente, na análise do funcionamento do recife para o surf.

Assim, neste artigo apresenta-se uma descrição geral da área de estudo, do estudo em modelo físico do recife artificial e dos códigos COULWAVE e FUNWAVE, nas Secções 2, 3 e 4, respectivamente. Seguidamente, são descritas as condições de cálculo dos códigos e efectua-se uma comparação dos resultados numéricos e experimentais em termos dos valores de elevação da superfície livre e de índices de agitação. Finalmente, o funcionamento do recife é analisado recorrendo aos parâmetros de surfabilidade obtidos através dos resultados dos códigos: ângulo de rebentação e tipo de rebentação.

## 2. ÁREA EM ESTUDO

A praia de S. Pedro do Estoril pertence ao Concelho de Cascais, Portugal, e compreende um areal com 400 m de extensão e largura variável entre 25 m e 35 m, ladeado por formações rochosas baixas, ver Figura 1.



Figura 1. Localização da área de estudo para a implantação do recife artificial e aspecto da costa nesta zona.

Figure 1. Site of the artificial reef and adjacent coastal area.

A análise da zona em estudo, das características da agitação existente e das características da rebentação que ocorre nessa zona, permitiu identificar um conjunto de locais possíveis para a implantação de um recife artificial. Estes locais estão delimitados a nascente pela zona de reserva biofísica da Praia das Avenças e a poente pela zona do Castelo Neogótico, junto a S. João do Estoril (Bicudo et al., 2007a). Destes locais, o escolhido foi a poente da Ponta do Sal, ver Figura 1.

As razões para a escolha desse local resultaram do facto de ser facultada a criação de uma nova zona para a prática de surf para surfistas experientes na praia de S. Pedro do Estoril (a poente da Ponta do Sal) de qualidade internacional, o que permitirá distribuir os surfistas por mais zonas da praia e oferecerá condições mais adequadas para a realização de campeonatos de surf. Além disso, permitirá manter as zonas de surf já existentes, que já oferecem condições excelentes para a prática de surf de níveis iniciado e intermédio.

### 3. MODELAÇÃO FÍSICA

O estudo em modelo físico da solução de recife seleccionada teve como objectivo a verificação do funcionamento hidrodinâmico dessa solução (Fortes et al., 2008b). Estes ensaios foram realizados nas instalações do LNEC, para diferentes condições de agitação incidente, de modo a avaliar as condições de rebentação sobre o recife.

#### 3.1 Instalação experimental

Os ensaios foram realizados num tanque de ondas irregulares do Pavilhão de Hidráulica Marítima do LNEC com uma área aproximada de 600 m<sup>2</sup> (aproximadamente 30.0 m de comprimento por 20.0 m de largura). Foi utilizado um gerador de ondas irregulares, cuja pá tem 6 m de largura e 0.80 m de altura.

O modelo foi construído e explorado à escala geométrica de 1:30, de acordo com a lei de semelhança de Froude, lei usualmente utilizada em estudos que envolvam propagação e rebentação de ondas. Segundo Toumazis e Anastasious (1990), embora alguns pormenores do processo de rebentação não sejam completamente modelados por esta lei de semelhança, os modelos assim escalados reproduzem

satisfatoriamente a globalidade das condições. Os resultados dos ensaios experimentais levados a cabo por Stive (1985) (Hughes, 1993), permitiram concluir que os modelos à escala de Froude não conduzem a erros de escala significativos no que se refere à rebentação desde que a altura de onda esteja compreendida entre 0.1 m e 1.5 m (Hughes, 1993).

Nos ensaios realizados, apenas as duas menores alturas de onda testadas são inferiores a 0.1 m, esperando-se nessas algum efeito de escala, que se traduz num aumento da altura de onda na rebentação em relação à esperada no protótipo e numa alteração da posição da rebentação, mais próxima da costa do que a que ocorrerá no protótipo (Kortenhaus et al., 2005). No entanto, em estudos de carácter global, onde se pretenda estudar a propagação da onda até à rebentação sobre fundos reais, não existe neste momento outra ferramenta tão fiável (Kamphuis, 1996), como a modelação física.

A reprodução da batimetria da zona em estudo foi realizada de acordo com o protótipo assim como a envolvente da área em estudo.

Foram realizados ensaios para a situação sem recife artificial, que servem de situação de referência e validação dos modelos numéricos. Posteriormente, foi implementada a solução de recife artificial seleccionada nos estudos em modelo numérico, definida por Bicudo et al. (2007a, b) (ver Figura 2).

O recife é formado pelo um tronco principal de 200 m metros de comprimento por 40 m de largura e pela cabeça de 40 m em largura e comprimento. O tronco e a cabeça do recife têm um declive de 7.5 %. Na Figura 3 apresenta-se a forma do recife em planta e a secção transversal do tronco do recife.

As características da agitação marítima local, determinadas a partir dos regimes de agitação marítima locais na zona em frente à praia de São Pedro do Estoril, Fortes et al. (2007) e, sobretudo a direcção predominante das ondas, 195° (S-15-W) e 265° (W-5-S), e as direcções mais frequentes, de 235° (S-45-W) a 255° (S-55-W) determinaram a orientação do recife. Verificou-se que a orientação do recife afecta o ângulo da rebentação enquanto que o declive do recife afecta o tipo de rebentação, que se pretende que seja do tipo mergulhante.

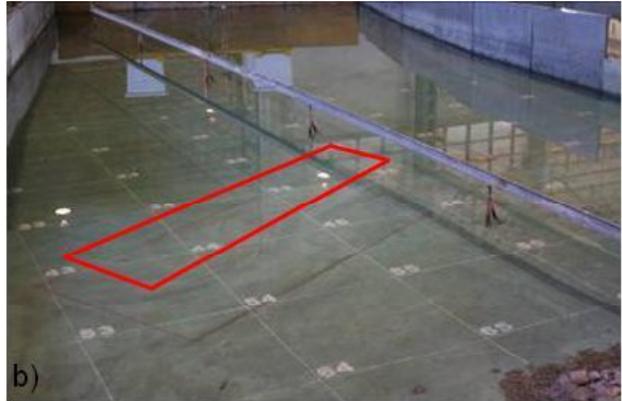
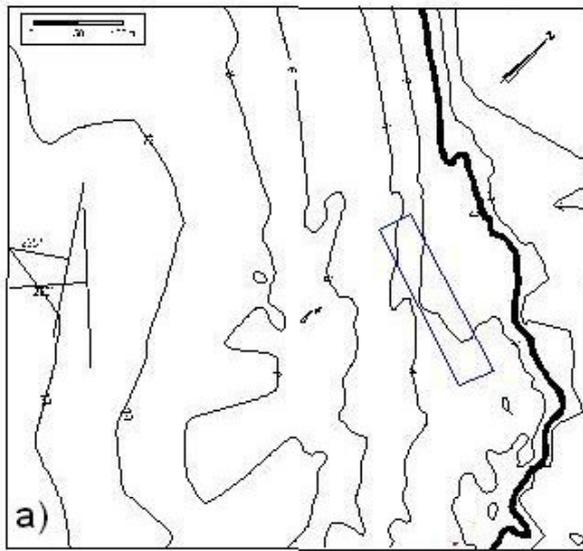


Figura 2. a) Batimetria da área em estudo; b) Modelo físico sem o recife; c) Modelo físico com o recife.  
Figure 2. a) Bathymetry to be tested; b) Physical model without reef; c) Physical model with reef.

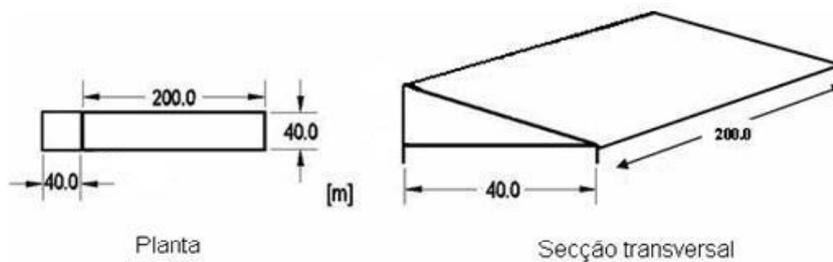


Figura 3. Geometria do recife ensaiado, Bicudo et al. (2007a).  
Figure 3. Geometry of the reef, Bicudo et al. (2007a).

### 3.2 Condições de ensaio

Os níveis de maré e as condições de agitação incidente simuladas no tanque foram definidos por Bicudo et al. (2007b) com base no regime de agitação marítima obtido em Fortes et al. (2007), nos resultados da propagação de ondas desde o largo até à cota -10 m Z.H. (que é a batimétrica até à qual se reproduziu

os fundos no modelo físico), e considerando ainda algumas condições que, embora não sejam as mais frequentes, são as mais interessantes do ponto de vista da prática do surf, tais como as referentes aos períodos de onda mais elevados para as diferentes alturas de onda.

Para a situação sem e com recife, foram efectuados ensaios com ondas regulares, com duração de 5 minutos cada. Foi admitido um rumo de incidência,  $\theta$ , de  $220^\circ$  (S- $40^\circ$ -W), contados a partir de N e no sentido horário. Efectuaram-se ensaios para o nível de maré (+2.0 m Z.H.) que corresponde ao nível médio (NM), com três períodos de onda, T, (11 s, 15 s e 19 s) e valores de altura de onda, H, que variam de 1 m a 3 m, ou até se verificar a rebentação na zona do baterdor.

Em cada ensaio, procedeu-se à:

- Identificação visual da linha de rebentação e das condições de rebentação;
- Representação das linhas de rebentação;
- Medição da elevação da superfície livre em vários pontos no modelo, Figura 4a;
- Filmagem simultânea em três posições de

- forma a observar as condições de rebentação;
- Execução de fotografias de forma a observar as condições de rebentação.

Para a medição da elevação da superfície livre nos referidos pontos usaram-se simultaneamente 7 sondas resistivas, Figura 4a, em variadas posições. Uma das posições, em frente ao gerador de ondas (Sonda 1, S1) manteve-se inalterada ao longo de todos os ensaios, para garantir a repetibilidade e o controlo de qualidade dos ensaios efectuados. As restantes sondas (Sondas 2 a 7, S2 a S7) tomaram diferentes posições consoante os testes efectuados, Figura 4a. Estas posições foram estabelecidas numa quadrícula que foi desenhada no modelo. Assim, obtiveram-se valores da elevação da superfície livre em 36 localizações diferentes, Figura 4b, divididas em 6 grupos, designadas de P1 a P6, Figura 4c.

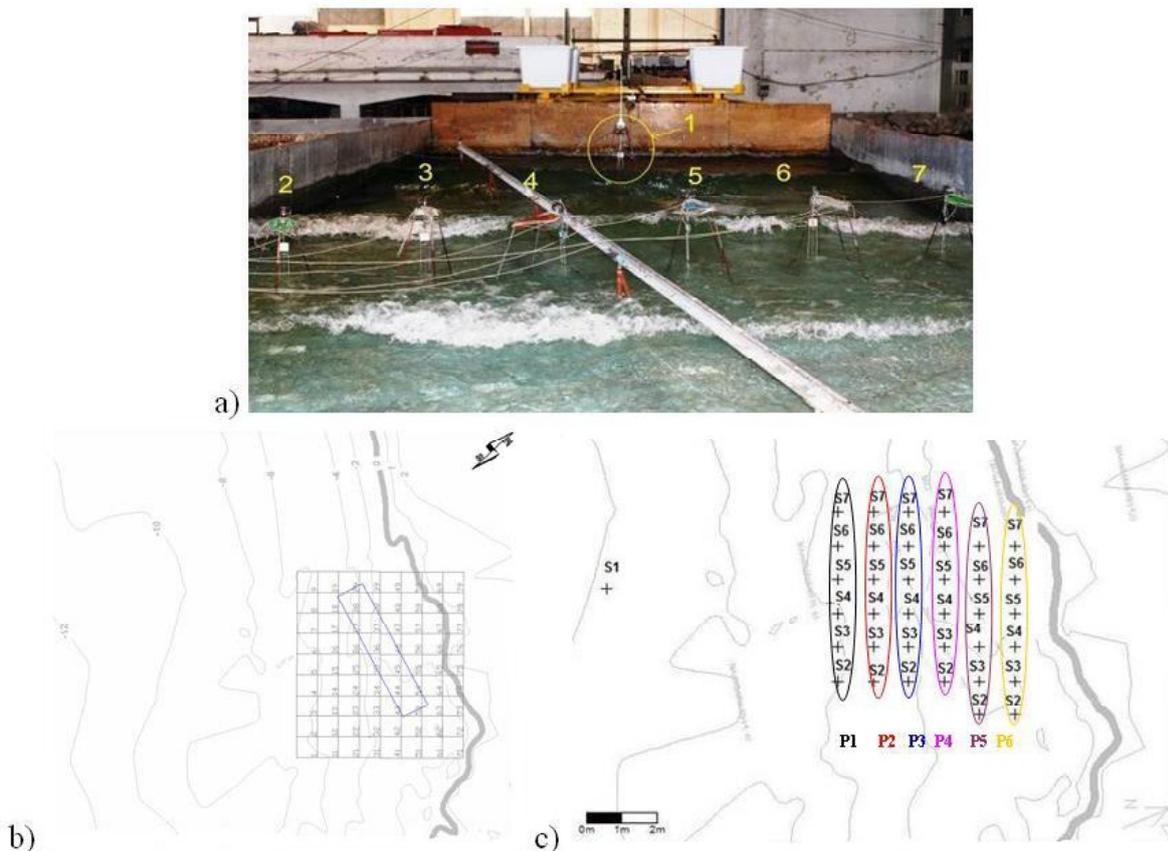


Figura 4. a) Localização das sondas durante um ensaio: S1 - Em frente ao baterdor; S2 a S7 - Segundo a linha de pontos de uma quadrícula; b) Quadrícula de pontos; c) Identificação das secções.

Figure 4. a) Location of the gauges during a test: S1 – in front of the wave maker; S2 to S7 – in a line of grid points; b) Grid points; c) Sections.

### 3.3 Tratamento e análise de resultados

Para cada condição de agitação ensaiada, efectuaram-se:

- Cálculo dos valores da altura de onda significativa em cada ponto de medição, com base nos registos da elevação da superfície livre obtidos nas sete sondas colocadas na zona de implantação do recife artificial (36 pontos), Figura 5a;
- Cálculo dos valores do índice de agitação em cada ponto de medição. Os índices de agitação,  $H/H_0$ , são dados pela relação entre a altura de

onda medida em cada ponto,  $H$ , e a altura de onda medida no ponto à saída do gerador de ondas (sonda S1),  $H_0$ , em cada ensaio (ver Figura 5b);

- Análises da localização, do comprimento e do tipo de rebentação na zona do recife artificial com base nas filmagens e fotografias efectuadas (ver Figura 6);
- Figuras com a representação das linhas de rebentação, para cada condição de ensaio, como a que se apresenta na Figura 7.

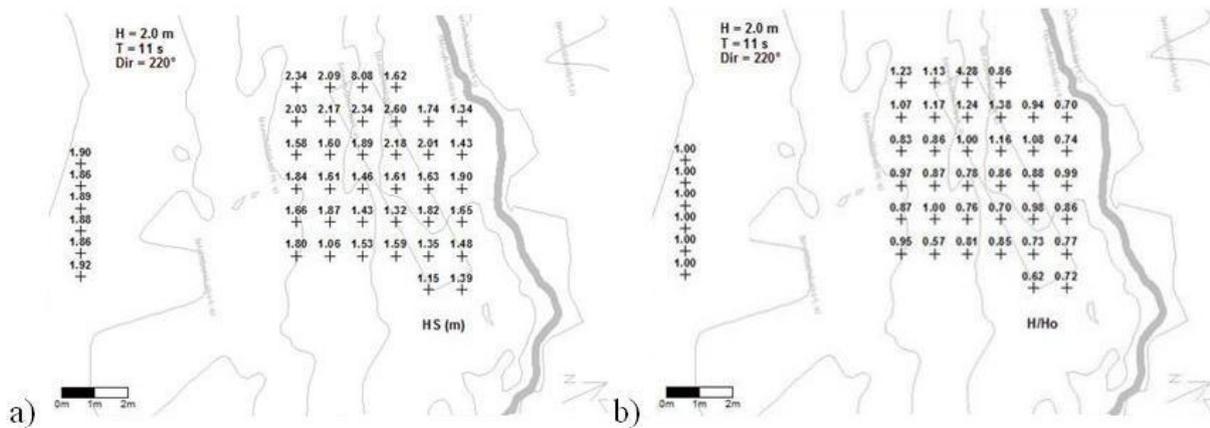


Figura 5. Exemplo de resultados: a) Valores da altura de onda. b) Índices de agitação nas sondas.

Figure 5. Example of the obtained results: a) Values of wave height; b) Breaking wave indexes at the wave gauges.

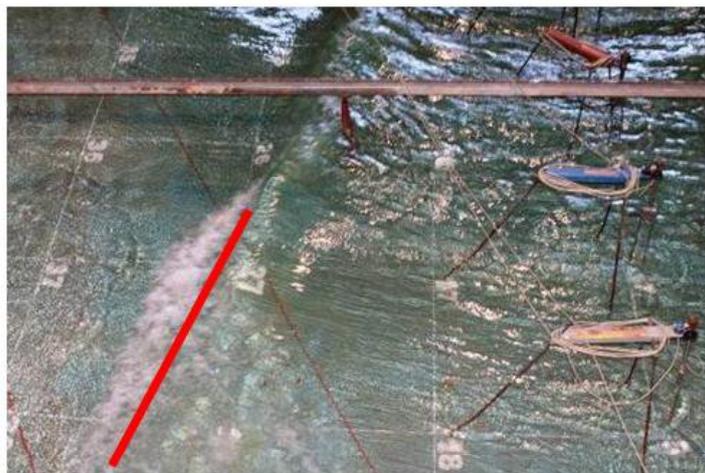


Figura 6. Localização da linha de rebentação obtida através de fotografias.

Figure 6. Breaking line obtained using photographs.

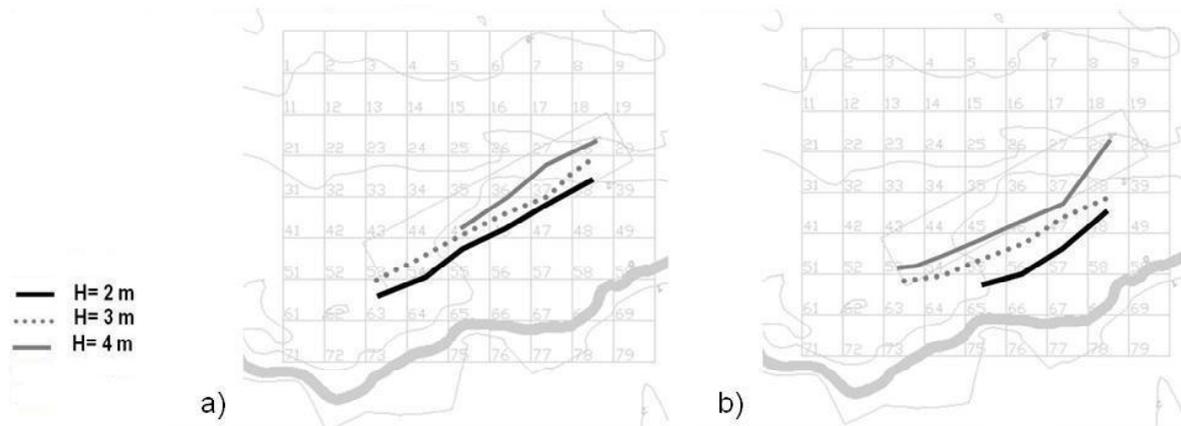


Figura 7. Posição das linhas de rebentação para a situação com recife: a) Onda incidente com  $T=11$  s e  $\theta=220^\circ$ ; b) Onda incidente com  $T=19$  s e  $\theta=220^\circ$ .

Figure 7. Position of the breaking lines with reef: a) Incident wave with  $T=11$  s,  $\theta=220^\circ$ ; b) Incident wave with  $T=19$  s,  $\theta=220^\circ$ .

A análise dos resultados dos ensaios permitiu concluir que, em geral:

- Em todo o domínio, o recife introduz claramente alterações na posição da linha de rebentação;
- Em todos os casos, a linha de rebentação passa a posicionar-se sobre ou imediatamente após o recife, ao contrário do que se verificava na situação sem recife;
- Para a direcção e períodos testados, o recife melhora as condições para a prática do surf para a gama de alturas frequente na zona de estudo (1 m a 3 m);
- A orientação da linha de rebentação na situação com recife muda claramente face à situação sem recife e o comprimento da linha de rebentação mantém-se ou aumenta face ao acontecido na situação sem recife;
- O recife produz também melhores resultados para os períodos de 11 s e 19 s e para as alturas menores.

#### 4. MODELOS NUMÉRICOS

No âmbito da modelação numérica, os modelos baseados nas equações estendidas de Boussinesq permitem uma descrição adequada da evolução das ondas em zonas de profundidade variável, onde os

efeitos da refacção, difracção e efeitos não lineares afectam a propagação das ondas.

São exemplos destes modelos, o código FUNWAVE, Kirby et al. (1998) e Chen et al. (2000), e o código COULWAVE, Lynett e Liu (2004). Ambos permitem reproduzir a maioria dos fenómenos intervenientes na transformação da onda em fundos de profundidade variável e na presença de correntes: dispersão de frequência, dispersão de amplitude, empolamento (linear e não-linear), difracção, refacção pelo fundo e devida às correntes, geração de harmónicas e dissipação de energia por rebentação da onda.

O código FUNWAVE, desenvolvido por Kirby et al. (1998), resolve as equações não-lineares de Boussinesq deduzidas por Wei et al. (1995b). Estas equações foram deduzidas através da consideração de uma aproximação polinomial de 4ª ordem para a distribuição vertical da velocidade. Este modelo apresenta propriedades lineares de dispersão que vão até  $kh \sim 3$ . Em termos de empolamento, cinemática da onda e interacções não lineares estes são correctamente simulados até  $kh \sim 3$ . Assim, devido às hipóteses base admitidas, este modelo só pode ser aplicado entre zonas de profundidade intermédia a águas pouco profundas desde que os efeitos não lineares não sejam significativos. Devido à necessidade de memória e CPU, o modelo também só pode ser aplicado em zonas de pequena dimensão.

O código COULWAVE, desenvolvido por Lynett e Liu (2004), também resolve as equações não-lineares de Boussinesq deduzidas por Wei et al. (1995b). No entanto, para obtenção dessas equações Lynett e Liu utilizaram o conceito de “multi-layer” (multi-camada) em que a coluna de água é dividida em várias camadas. A precisão do modelo assim desenvolvido depende do número de camadas que se considera permitindo a sua utilização em águas muito profundas. Deste modo, o modelo é melhor do ponto de vista das características lineares de dispersão. Além disso, foram incluídos termos adicionais associados à variação no tempo da profundidade, para ter em conta o deslizamento de camadas de terreno emerso ou a ocorrência tsunamis originados por sismos. O tratamento numérico dessas equações é semelhante ao de Wei et al. (1995b) com excepção de alguns termos não lineares dispersivos.

Ambos os códigos, FUNWAVE e COULWAVE, apresentam a mesma formulação de rebentação, Zelt (1991), através da inclusão de termos de viscosidade turbulenta nas equações de conservação da quantidade de movimento. No entanto, existem algumas diferenças no que diz respeito aos respectivos critérios de rebentação (início, fim e duração), que serão descritas nos pontos seguintes. Note-se que, em todos os modelos, a rebentação é um dos fenómenos mais complexos de modelar e, em geral, é função de um conjunto de parâmetros (mais ou menos empíricos) para os quais é necessário efectuar uma análise de sensibilidade de modo a avaliar quais os valores mais adequados. Essa análise de sensibilidade deve ter por base medições em modelo físico ou protótipo.

Neste âmbito, para analisar o desempenho de cada um dos modelos atrás referidos, decidiu-se aplicá-los ao caso de teste de simulação da propagação de ondas regulares na zona de São Pedro do Estoril para o qual existem medições de modelo físico como referido anteriormente.

Nas próximas secções, apresentam-se primeira e sucintamente as características gerais dos dois códigos numéricos, com especial atenção para a formulação da rebentação. Efectua-se uma comparação dos resultados numéricos e experimentais em termos dos valores de elevação da superfície livre e índices de agitação. Finalmente, são apresentadas as principais conclusões obtidas neste trabalho.

#### 4.1 Código FUNWAVE

O código FUNWAVE (Kirby et al., 1998 e Chen et al., 2000), é uma implementação do modelo de propagação de ondas baseado nas equações de Boussinesq estendidas, deduzidas por Wei et al. (1995a, b). O modelo resolve as equações de conservação de massa (1) e quantidade de movimento (2):

$$\eta_t + \nabla \cdot \left\{ (h + \eta) \left[ \mathbf{u}_\alpha + \left( z_\alpha + \frac{1}{2}(h - \eta) \right) \nabla (\nabla \cdot (h \mathbf{u}_\alpha)) \right] + \left( \frac{1}{2} z_\alpha^2 - \frac{1}{6} (h^2 - h\eta + \eta^2) \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha) \right\} = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{u}_{\alpha t} + (\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla) \mathbf{u}_\alpha + g \nabla \eta + \\ & z_\alpha \left\{ \frac{1}{2} z_\alpha \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_{\alpha t}) + \nabla (\nabla \cdot (h \mathbf{u}_{\alpha t})) \right\} + \\ & \nabla \left\{ \frac{1}{2} (z_\alpha^2 - \eta^2) (\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla) (\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} [\nabla \cdot (h \mathbf{u}_\alpha) + \eta \nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha]^2 \right\} + \\ & \nabla \left\{ (z_\alpha - \eta) (\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla) (\nabla \cdot (h \mathbf{u}_\alpha)) \right. \\ & \left. - \eta \left[ \frac{1}{2} \eta \nabla \cdot \mathbf{u}_{\alpha t} + \nabla \cdot (h \mathbf{u}_{\alpha t}) \right] \right\} = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

onde  $\eta$  é a elevação da superfície livre,  $h$  é a profundidade, Figura 8,  $u_\alpha$  é o vector de velocidade horizontal à profundidade de  $z = z_\alpha = -0.531h$ ,  $g$  é a aceleração gravítica, o índice  $t$  representa a derivada

parcial em relação ao tempo e  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$ .

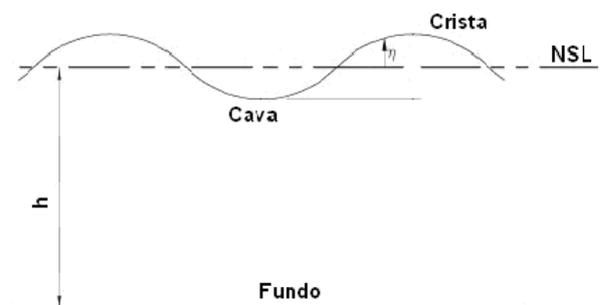


Figura 8. Esquema das características de uma onda.  
Figure 8. Wave characteristics.

As equações (1) e (2) descrevem a evolução de ondas sobre um fundo inclinado e impermeável, sem considerar rebentação.

Kennedy et al. (2000) e Chen et al. (2000) introduziram termos adicionais nas equações de modo a ter em conta o atrito de fundo, a rebentação de ondas, a geração de ondas no interior do domínio e fronteiras dinâmicas (variáveis na forma e na posição ao longo do tempo).

Como condições de fronteira, o modelo admite fronteiras absorventes de ondas simuladas por termos dissipadores de energia presentes na equação de conservação da quantidade de movimento. Desta forma, controlam-se os efeitos de reflexão nas fronteiras do domínio. No fundo, o modelo admite velocidades tangenciais (fluido ideal).

O esquema numérico de diferenças finitas utilizado para a discretização temporal das equações é o método “previsor-corrector” de Adams-Bashforth-Moulton de 4ª ordem, que utiliza um passo de previsão de 3ª ordem Adams-Bashforth e de 4ª ordem Adams-Moulton para o passo da correcção. As derivadas espaciais de 1ª ordem são discretizadas por diferenças finitas centrais, utilizando uma fórmula de 5 pontos, com uma precisão de 4ª ordem. As derivadas espaciais e temporais de ordem superior são efectuados com uma precisão de 2ª ordem.

Os resultados fornecidos pelo código constam de séries temporais e distribuições espaciais da elevação da superfície livre e velocidades horizontais nos pontos do domínio e instantes temporais definidos pelo utilizador.

## 4.2 Código COULWAVE

O código COULWAVE, Lynett e Liu (2004), tal como o código FUNWAVE, é uma implementação do modelo de propagação de ondas baseado nas equações de Boussinesq estendidas, deduzidas por Wei et al. (1995a, b). No entanto, neste código, as equações do modelo, do tipo de Boussinesq, são deduzidas a partir da integração em profundidade das equações de continuidade e movimento, utilizando o conceito de camadas múltiplas (“multi-layer”). Em cada camada admite-se um dado perfil de velocidades. Com estes perfis de velocidade, que coincidem na fronteira entre camadas, é deduzida um conjunto de equações que permite estender a aplicabilidade do modelo a águas

muito profundas e apresentar características lineares até  $kh \sim 8$  e um comportamento não linear de 2ª ordem até  $kh \sim 6$ . Para uma camada, as equações de conservação de massa (3) e quantidade de movimento (4) vêm:

$$\eta_t + \nabla \cdot [(h + \varepsilon\eta)\mathbf{u}_\alpha] - \mu^2 \nabla \cdot \left\{ (h + \varepsilon\eta) \left[ \frac{1}{6} (\varepsilon^2 \eta^2 - \varepsilon\eta h + h^2) - \frac{1}{2} z_\alpha^2 \right] \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha) + \left[ \frac{1}{2} (\varepsilon\eta - h) - z_\alpha \right] \nabla [\nabla \cdot (h\mathbf{u}_\alpha)] \right\} = O(\mu^4) \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{u}_{\alpha t} + \varepsilon \mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla \mathbf{u}_\alpha + \nabla \eta + \\ & \mu^2 \left\{ \frac{1}{2} z_\alpha^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_{\alpha t}) + z_\alpha \nabla [\nabla \cdot (h\mathbf{u}_{\alpha t})] \right\} + \\ & \varepsilon \mu^2 \left\{ [\nabla \cdot (h\mathbf{u}_\alpha)] \nabla [\nabla \cdot (h\mathbf{u}_\alpha)] - \nabla [\zeta (\nabla \cdot (h\mathbf{u}_{\alpha t}))] + \right. \\ & \quad \left. (\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla z_\alpha) \nabla [\nabla \cdot (h\mathbf{u}_\alpha)] \right\} + \\ & \varepsilon \mu^2 \left\{ z_\alpha \nabla [\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla (\nabla \cdot (h\mathbf{u}_\alpha))] + z_\alpha (\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla z_\alpha) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha) + \right. \\ & \quad \left. \frac{z_\alpha^2}{2} \nabla [\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha)] \right\} + \\ & \varepsilon^2 \mu^2 \nabla \cdot \left\{ -\frac{\eta^2}{2} \nabla \cdot \mathbf{u}_{\alpha t} - \eta \mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla [\nabla \cdot (h\mathbf{u}_\alpha)] + \right. \\ & \quad \left. \eta [\nabla \cdot (h\mathbf{u}_\alpha)] \nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

onde  $\eta$  é a elevação da superfície livre, o subscrito  $t$  indica a derivada no tempo  $h$  é a profundidade,  $\mathbf{u}_\alpha = (u_\alpha, v_\alpha)$  é o vector de velocidade horizontal à profundidade definida em cada camada  $z_\alpha = -0.531h$ ,  $g$  é a aceleração gravítica. Os coeficientes empíricos  $\varepsilon = a/h$  e  $\mu = h/\lambda$ , onde  $a$  é a amplitude da onda e  $\lambda$  o comprimento de onda. O perfil vertical da velocidade horizontal é dado por:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_\alpha - \sigma^2 \left\{ \frac{z^2 - z_\alpha^2}{2} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha) + (z - z_\alpha) \nabla \left[ \nabla \cdot (h\mathbf{u}_\alpha) + \frac{h_t}{\varepsilon} \right] \right\} + O(\mu_0^4) \quad (5)$$

sendo  $z$  escolhido de modo a que as características resultantes do modelo de Lynett e Liu estejam de acordo com a teoria linear e  $\sigma = h_0/\lambda$  é um parâmetro adimensional, representando  $h_0$  e  $\lambda$  escalas

características dos comprimentos vertical e horizontal, respectivamente. A diferença relativamente a Wei et al. (1995b) refere-se a alguns termos não-lineares dispersivos e à existência de termos adicionais, devidos à dependência temporal da profundidade.

Analogamente ao que acontece no código FUNWAVE, Lynett e Liu (2004) introduziram termos adicionais nas equações de modo a ter em conta o atrito de fundo, a rebentação de ondas e a geração de ondas no interior do domínio. Além disso, incluíram termos de profundidade dependentes do tempo para ter em conta a variações do perfil de fundo, no tempo, devido à ocorrência de um deslizamento ou de um sismo.

A resolução das equações referidas é também semelhante à formulação apresentada por Wei et al. (1995a, b) utilizando um esquema predictor-corrector de Adams-Bashforth, i.e, esquema explícito de Adams-Bashforth de 3ª ordem no tempo para o passo predictor e implícito de 4ª ordem no tempo para o passo corrector. Para as derivadas espaciais de 1ª ordem são utilizadas diferenças finitas centrais com uma precisão de 4ª ordem. As derivadas espaciais de 2ª ordem com uma precisão de 2ª ordem. O modelo é formalmente preciso até  $\Delta t^4$  no tempo de  $\Delta x^4$  no espaço.

Para as fronteiras exteriores, são aplicados dois tipos de condições: reflexão total e radiação. No primeiro caso utiliza-se a metodologia de Wei et al. (1995a, b), enquanto que para a radiação ou condição de fronteira aberta, é usado um esquema de fronteira absorvente (“sponge layers”), de acordo com Kirby et al. (1998).

Entre os principais resultados fornecidos pelo modelo constam as séries temporais e distribuições espaciais da elevação da superfície livre e as velocidades horizontais nos pontos do domínio e instantes temporais definidos pelo utilizador.

### 4.3 Modelo de rebentação

Em ambos os códigos, na simulação da hidrodinâmica da zona de rebentação, a dissipação de energia devido à rebentação é tratada através da inclusão de termos de viscosidade turbulenta nas equações de conservação da quantidade de movimento, Zelt (1991):

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \dots + R_f + R_b = 0 \quad (6)$$

em que  $R_b = F_{br} + G_{br}$

$$F_{br} = \frac{1}{h + \eta} \left[ \left( v \left( (h + \eta) u_\alpha \right)_x \right)_x + \frac{1}{2} \left( v \left( (h + \eta) u_\alpha \right)_y + \left( (h + \eta) v_\alpha \right)_x \right)_y \right] \quad (7)$$

$$G_{br} = \frac{1}{h + \eta} \left[ \frac{1}{2} \left( v \left( (h + \eta) v_\alpha \right)_x + \left( (h + \eta) u_\alpha \right)_y \right)_x + \left( v \left( (h + \eta) v_\alpha \right)_y \right)_y \right] \quad (8)$$

em que os índices  $x$  e  $y$  representam derivadas espaciais e  $v$  é o coeficiente de viscosidade turbulenta, associado à frente da onda. Este coeficiente é definido por:

$$g = B(h + \zeta) \zeta_t \quad (9)$$

A quantidade  $B$ , que controla a ocorrência de dissipação de energia e garante uma suave transição entre a rebentação e a zona de não rebentação, é dada por:

$$B = \begin{cases} \delta & \zeta_t \geq 2\zeta_t^b \\ \delta(\zeta_t/\zeta_t^b - 1), & \zeta_t^b \leq \zeta_t \leq 2\zeta_t^b \\ 0, & \zeta_t \leq \zeta_t^b \end{cases} \quad (10)$$

onde  $\delta$  é um factor amplificador e o parâmetro  $\zeta_t^b$  determina o início e fim da rebentação da onda.  $\zeta_t^b$  é determinado do seguinte modo:

$$\zeta_t^b = \begin{cases} \zeta_t^{(F)} & t - t_0 \geq T^b \\ \zeta_t^{(I)} + \frac{t - t_0}{T^b} (\zeta_t^{(F)} - \zeta_t^{(I)}), & 0 \leq t - t_0 \leq T^b \end{cases} \quad (11)$$

em que  $\zeta_t^{(I)}$  define o início da rebentação, i.e., é o patamar inicial da elevação da superfície livre que tem de ser excedido para a rebentação acontecer,  $\zeta_t^{(F)}$  define o fim de rebentação, i.e., é o mínimo valor da elevação da superfície livre para a

rebentação continuar,  $t$  é o instante local,  $t_0$  é o instante de tempo em que a rebentação da onda ocorre,  $t-t_0$  é a duração do evento de rebentação e  $T^b$  é o tempo de transição, ou seja, o instante em que se considera que a rebentação cessa. O início e fim da rebentação da onda são determinados utilizando os parâmetros  $\zeta_t^{(I)}$  e  $\zeta_t^{(F)}$  e do tempo de transição  $T^b$ .

Até este ponto o modelo é idêntico ao modelo de Kennedy et al. (2000). A diferença reside no facto de que em Kennedy a determinação dos parâmetros é efectuada em termos da velocidade da onda longa linear, i.e.,  $\zeta_t^{(I)} = 0.65\sqrt{gh}$ . No caso do COULWAVE utiliza-se a velocidade da onda longa não-linear, i.e.,  $\zeta_t^{(I)} = 0.65\sqrt{gH}$ , em que  $H = h + \zeta$ . Assim, no COULWAVE e no FUNWAVE os valores de  $\zeta_t^{(I)}$  são dados por  $0.65\sqrt{gH}$  e  $0.08\sqrt{gH}$  e os valores de  $\zeta_t^{(F)}$  são dados por  $0.35\sqrt{gH}$  e  $0.15\sqrt{gH}$ , respectivamente. O valor de  $T^b$  é dado por  $8\sqrt{\frac{H}{g}}$  para o COULWAVE e  $5\sqrt{h/g}$  para o FUNWAVE.

O valor adoptado para  $\delta$  é 6.5 no caso do COULWAVE e 1.2 no caso do FUNWAVE.

Estes parâmetros foram definidos com base em testes sobre fundos de inclinação suave. Assim, noutras situações, cujos perfis se afastem desta situação ideal, haverá que proceder ao ajuste do valor destes parâmetros.

#### 4.4 Modelo de atrito de fundo

O atrito de fundo é descrito, em ambos os códigos, na forma quadrática como:

$$R_f = \frac{f}{H} u_b |u_b| \quad (12)$$

onde  $H = h + \zeta$ , representando a coluna de água total,  $f$  é o coeficiente de atrito de fundo que, de acordo com os autores do modelo, assume valores entre 0.001 e 0.01, e  $u_b$  é a velocidade horizontal junto ao fundo. Este parâmetro está dependente do número de Reynolds e das condições de fundo.

#### 4.5 Vantagens e desvantagens dos códigos FUNWAVE e COULWAVE

Do exposto, verifica-se que os códigos

FUNWAVE e COULWAVE permitem reproduzir a maioria dos fenómenos intervenientes na transformação da onda em fundos de profundidade variável e na presença de correntes: dispersão de frequência, dispersão de amplitude, empolamento (linear e não-linear), difracção, refração pelo fundo e devida às correntes, geração de harmónicas e dissipação de energia por rebentação da onda.

No entanto, como para a dedução das equações em que se baseiam os modelos, se admite uma determinada aproximação polinomial para o perfil de velocidades ao longo da coluna de água (FUNWAVE) ou para cada camada em que essa coluna se divide (COULWAVE), e se procede à integração vertical do perfil de velocidade (que é implícita à dedução das equações do tipo Boussinesq), tal limita a aplicação deste modelo a fundos moderadamente inclinados. Com efeito, não é possível descrever convenientemente o escoamento em zonas onde o efeito da profundidade tem importância (zonas de variação brusca da profundidade e de espriamento, por exemplo).

Igualmente, não é possível obter com estes modelos a estrutura vertical da velocidade da partícula, aspecto particularmente importante quando se está interessado no transporte de sedimentos.

Por outro lado, os fenómenos de dissipação da energia são introduzidos através de termos adicionados à equação original. No caso particular da rebentação, como referido, esta é incluída através da introdução de um termo de viscosidade turbulenta na equação de conservação da quantidade de movimento. Ora este modelo de rebentação é dependente de um conjunto de parâmetros relacionados com o início, o fim e a duração da rebentação, que tem de ser calibrados para cada caso de estudo, o que representa uma limitação do código numérico.

Como diferenças mais significativas entre os dois códigos, referem-se as características de dispersão linear até  $kh \sim 8$  e um comportamento não-linear de 2ª ordem até  $kh \sim 6$  por parte do COULWAVE enquanto que o FUNWAVE apresenta características de dispersão linear até  $kh \sim 3$  e um comportamento não-linear até  $kh \sim 3$ . Tal implica um maior domínio de aplicação do código COULWAVE. Refira-se ainda as diferenças relacionadas com os termos de

profundidade dependentes do tempo para ter em conta a variações do perfil de fundo no tempo devido à ocorrência de um deslizamento ou de um sismo no código COULWAVE e as diferenças nos critérios relacionados com o início, duração e fim de rebentação impostos nos dois códigos já referidas anteriormente.

## 5. APLICAÇÃO NUMÉRICA

Nesta secção, descrevem-se as simulações numéricas da propagação de ondas sobre o recife artificial, efectuadas com os códigos FUNWAVE e COULWAVE, para cinco condições de agitação testadas em modelo físico.

Primeiramente, é efectuada uma análise de sensibilidade para os parâmetros relacionados com o início da rebentação para os dois códigos numéricos. Os resultados numéricos, em termos da elevação da superfície livre e da altura de onda média quadrática, em secções/pontos pré-definidos, são comparados com resultados experimentais.

Finalmente, com os resultados numéricos obtidos no domínio de cálculo, compararam-se as respectivas zonas de rebentação e calculam-se os parâmetros de surfabilidade.

### 5.1 Condições de Cálculo

#### 5.1.1 Características da agitação marítima

As quatro condições de agitação aqui testadas numericamente correspondem a agitação regular e têm as características na zona do batedor apresentadas na Tabela 1. Para estas condições obtiveram-se, em modelo físico, boas condições para a prática de surf, com uma rebentação do tipo mergulhante.

#### 5.1.2 Domínio computacional

O domínio de cálculo e a batimetria considerados nos cálculos efectuados com os modelos numéricos são os indicados na Figura 9. O domínio de cálculo, de 746x676 m<sup>2</sup>, foi discretizado por uma malha regular de espaçamento constante  $\Delta x = \Delta y = 2.0$  m, o que corresponde a um total de 126074 pontos. Foi adicionado ao domínio uma zona de profundidade constante na qual se efectua a geração da onda através do método da função fonte, Wei et al. (1999). Foram usadas, nas extremidades laterais (barlamar e sotamar) do domínio de cálculo, condições fronteira de absorção com o objectivo de absorver a energia das ondas que atingem estas regiões. Nas restantes fronteiras consideraram-se condições de fronteira de reflexão total.

No caso do código FUNWAVE, a função fonte (fonte geradora de ondas na secção ao longo do eixo y) foi colocada na posição  $x=88$  m, e foram impostas as condições de agitação de ondas regulares sinusoidais indicadas na Tabela 1. Os valores de  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  e  $\Delta t$  foram escolhidos por forma a obter-se a resolução espacial necessária e, ao mesmo tempo, satisfazer-se a condição de Courant–Friedrichs–Lewy

que impõe  $\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{0.5}{\sqrt{gh_{\max}}}$ . Os cálculos foram

assim realizados para um passo temporal de  $\Delta t=0.1$  s, o que corresponde a um número de Courant de cerca de 0.5. O tempo total simulado foi de 600 s. Nas fronteiras de absorção, a barlamar e sotamar do domínio, impuseram-se comprimentos de 100 m (50 células) e 50 m (25 células), respectivamente.

Tabela 1. Características da agitação.

Table 1. Characteristics of the wave conditions.

Caso de Teste	H (m)	T (s)	Direcção (°)	Nível de maré (m)	Tipo de rebentação
1	2	11	220	2.0	Mergulhante
2	3	11	220	2.0	Mergulhante
3	2	15	220	2.0	Mergulhante
4	2	19	220	2.0	Mergulhante

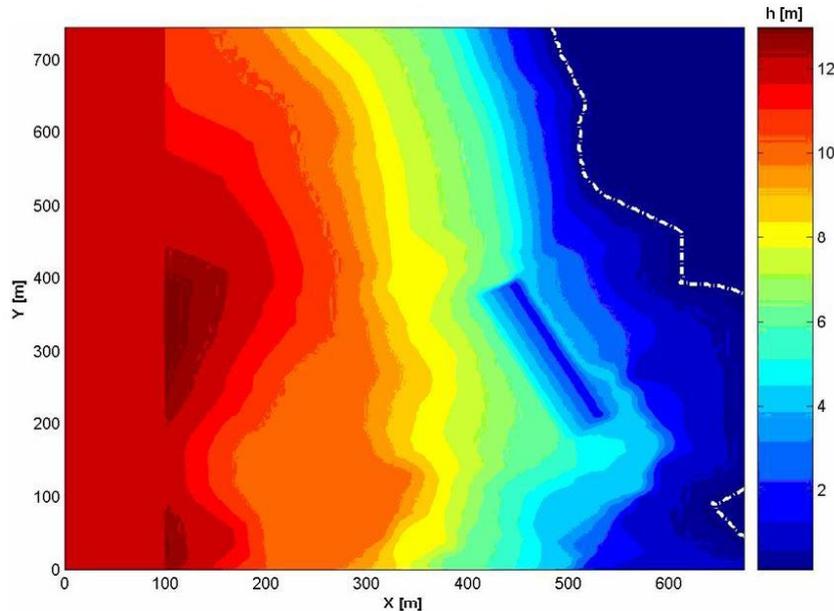


Figura 9. Domínio de cálculo e batimetria. A linha branca a tracejado representa a linha de costa.  
 Figure 9. Computational domain and bathymetry. The dashed white line represents the coastline.

No caso do código COULWAVE, é gerada uma malha regular com base num número mínimo de pontos por comprimento de onda dado pelo utilizador, definido consoante o período de forma a ser obtida uma malha com um espaçamento constante de 2.0 m. Foram utilizados os valores de 56, 79, e 100 pontos por comprimento de onda, para os períodos de 11 s, 15 s e 19 s, respectivamente. O número de Courant admitido foi igual a 0.1 e o passo temporal de 0.018 s. A função fonte foi colocada na posição  $x=88$  m e foram impostas as condições de agitação de ondas regulares sinusoidais indicados na Tabela 1. O tempo total de cálculo foi de 600 s. Impuseram-se condições de fronteira de reflexão total a todas as fronteiras do domínio e colocaram-se duas fronteiras absorventes a barlar e sotamar do domínio com meio comprimento de onda ( $\lambda/2=gT^2/4\pi$ ), o que corresponde a 56 m, 79 m e 101 m para os períodos de  $T=11$  s,  $T=15$  s e  $T=19$  s, respectivamente.

Os resultados numéricos de ambos os códigos foram obtidos para todos os nós da malha de cálculo em termos de elevação da superfície livre, componentes da velocidade em x e y e zonas de rebentação. Nas sondas ilustradas na Figura 4

obtiveram-se séries temporais de elevação da superfície livre que foram comparadas com os resultados do modelo físico.

### 5.1.3 Parâmetros de rebentação

Antes de correr sistematicamente os modelos numéricos foi necessário ajustar alguns dos parâmetros de forma a conseguir-se a melhor aproximação dos resultados numéricos aos experimentais, assegurando a estabilidade dos modelos. Os parâmetros analisados foram os relacionados com o atrito de fundo, o espraiamento e a rebentação. No caso do espraiamento, os valores adoptados encontram-se na gama de valores recomendados no manual.

No que diz respeito a  $\zeta_i^{(1)}$ , os valores indicados no manual variam entre  $0.35\sqrt{gh}$  e  $0.65\sqrt{gh}$ , sendo o valor mais baixo adequado a praia de perfil barra-fossa e o valor mais alto a praias de inclinação constante, Chen et al. (2000).

Seguindo o critério do modelo de rebentação do FUNWAVE, verificou-se que utilizando o valor mais baixo,  $\zeta_i^{(1)}=0.35\sqrt{gh}$ , a rebentação era convenientemente representada pelo modelo

numérico quando comparada com o modelo físico (Figura 7a), para  $T=11$  s,  $H=1.0$  m e  $\theta=220^\circ$  (Figura 10a).

Para  $\zeta_t^{(1)} = 0.65\sqrt{gh}$ , a rebentação ocorre na costa (Figura 10b), não estando assim de acordo com o observado nos ensaios em modelo físico (Figura 7a). O mesmo ocorre para a condição de agitação  $T=19$  s,  $H=2.0$  m, onde a posição de rebentação ocorre primeiro (no recife) com o parâmetro  $\zeta_t^{(1)} = 0.35\sqrt{gh}$  do que com  $\zeta_t^{(1)} = 0.65\sqrt{gh}$ , onde ocorre na costa (Figura 11a e b). No modelo físico (Figura 7b) a rebentação ocorre numa posição intermédia, depois do recife mas antes de chegar à costa.

Analisaram-se os índices de agitação para as condições de agitação  $\theta=220^\circ$ ,  $T=15$  s e  $H=2.0$  m, Figura 12, para o nível médio e para duas posições ao longo das secções transversais referentes às sondas S3, S4, S5 e S6, considerando diferentes valores da variável  $\zeta_t^{(1)}$ . Em relação ao FUNWAVE, a análise desta figura mostra que existe uma influência clara deste parâmetro na altura de onda, aumentando com o aumento de  $\zeta_t^{(1)}$ , especialmente depois da rebentação. Embora não seja claro qual o valor que leva a uma melhor concordância com os ensaios em modelo físico, optou-se por utilizar  $\zeta_t^{(1)} = 0.35\sqrt{gh}$  para as restantes simulações. No entanto, será necessário efectuar um estudo mais detalhado relativamente ao parâmetro de rebentação  $\zeta_t^{(1)}$ , seguindo, por exemplo, a formulação de Fortes et al. (2007) que, para praias de perfil barra-fossa, sugere a variação do parâmetro de rebentação  $\zeta_t^{(1)}$  entre  $0.65\sqrt{gh}$  e  $1.2\sqrt{gh}$ .

No caso do código COULWAVE foi também efectuada uma análise de sensibilidade semelhante à realizada com o código FUNWAVE. Para o parâmetro de rebentação  $\zeta_t^{(1)}$ , testaram-se os valores de  $0.35\sqrt{gh}$  e  $0.65\sqrt{gh}$  (ver Figura 12). Observa-se que a influência do valor de  $\zeta_t^{(1)}$  nos resultados não é significativa.

Na Figura 13 apresenta-se as zonas de rebentação obtidas com o código COULWAVE, para  $T=19$  s,  $H=2.0$ m, com  $\zeta_t^{(1)} = 0.35\sqrt{gh}$  e  $\zeta_t^{(1)} = 0.65\sqrt{gh}$ . Observa-se que a rebentação para  $0.35\sqrt{gh}$  se verifica antes do que acontece com  $0.65\sqrt{gh}$ , e para ambos os casos antes do que se verificou para o modelo físico. Assim, da análise efectuada optou-se pelo de

$\zeta_t^{(1)} = 0.35\sqrt{gh}$ , tal como no caso do FUNWAVE.

Na Figura 14 apresenta-se a comparação dos índices de agitação agora para  $T=19$  s,  $H=2.0$  m, obtidos com ambos os códigos numéricos para  $\zeta_t^{(1)} = 0.35\sqrt{gh}$ . Da análise desta figura, verifica-se que os códigos apresentam um comportamento muito semelhante em termos de zona de rebentação. No entanto, face aos resultados experimentais, ocorrem algumas diferenças: na secção S4 ocorrem duas zonas de rebentação no modelo físico (na zona do recife e junto à costa) que não são simuladas pelos modelos numéricos; na secção S5 ocorre apenas uma zona de rebentação no modelo físico (na zona do recife) e o código FUNWAVE prevê duas.

Relativamente ao parâmetro do atrito de fundo (f) foram testados os valores de 0.005 e 0.007 (Figura 15). Entre estes valores não se verificou uma diferença significativa optando-se assim por utilizar o primeiro já que este é o proposto no manual do modelo, Lynett e Liu (2004).

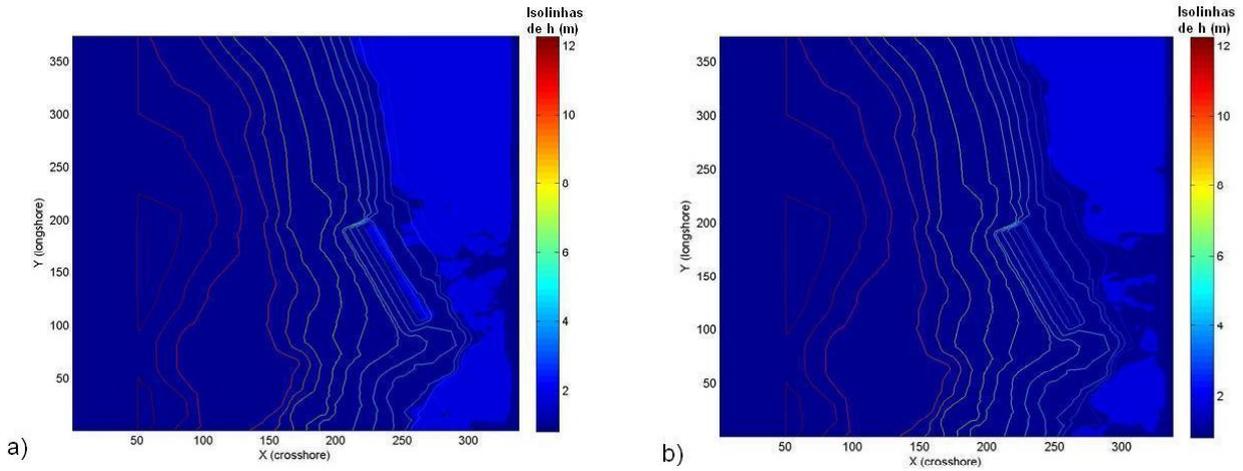


Figura 10. Código FUNWAVE. Zonas de rebentação: a)  $\zeta_i^{(I)} = 0.35\sqrt{gh}$  ; b)  $\zeta_i^{(I)} = 0.65\sqrt{gh}$  , para uma onda incidente de  $T=11$  s e  $H=1.0$  m. (Zonas de cor azul escuro não acontece a rebentação. Nas restantes zonas acontece a rebentação).

Figure 10. FUNWAVE model. Breaking locations: a)  $\zeta_i^{(I)} = 0.35\sqrt{gh}$  ; b)  $\zeta_i^{(I)} = 0.65\sqrt{gh}$  , for an incident wave with  $T=11$  s and  $H=1.0$  m. (Dark blue area - no breaking. Breaking occurs in the remaining areas).

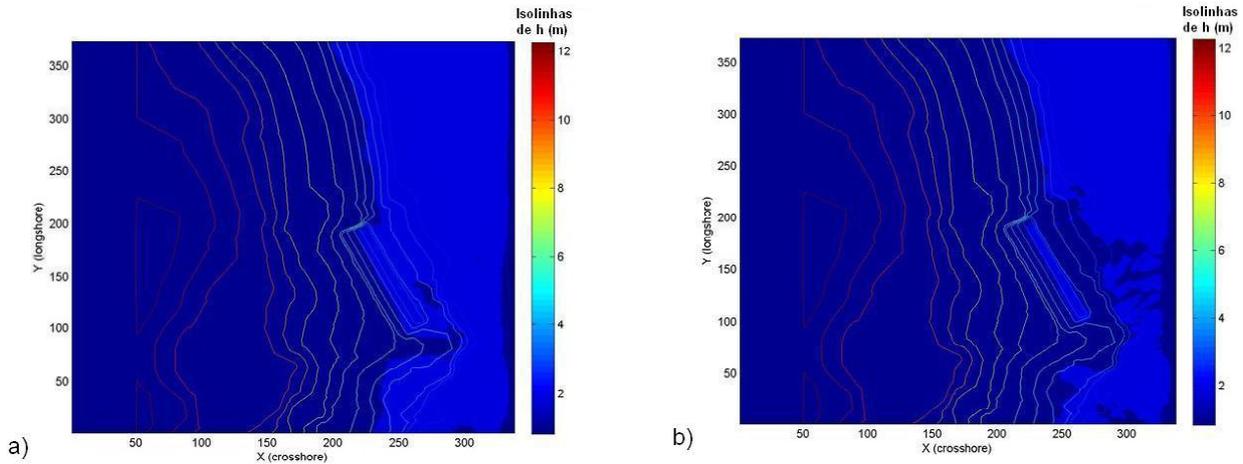


Figura 11. Código FUNWAVE. Zonas de rebentação: a)  $\zeta_i^{(I)} = 0.35\sqrt{gh}$ ; b)  $\zeta_i^{(I)} = 0.65\sqrt{gh}$  , para uma onda incidente de  $T=19$  s e  $H=2.0$  m. (Zonas de cor azul escuro não acontece a rebentação. Nas restantes zonas acontece a rebentação).

Figure 11. FUNWAVE model. Breaking locations: a)  $\zeta_i^{(I)} = 0.35\sqrt{gh}$  ; b)  $\zeta_i^{(I)} = 0.65\sqrt{gh}$  , for an incident wave with  $T=19$  s and  $H=2.0$  m. (Dark blue area - no breaking. Breaking occurs in the remaining areas).

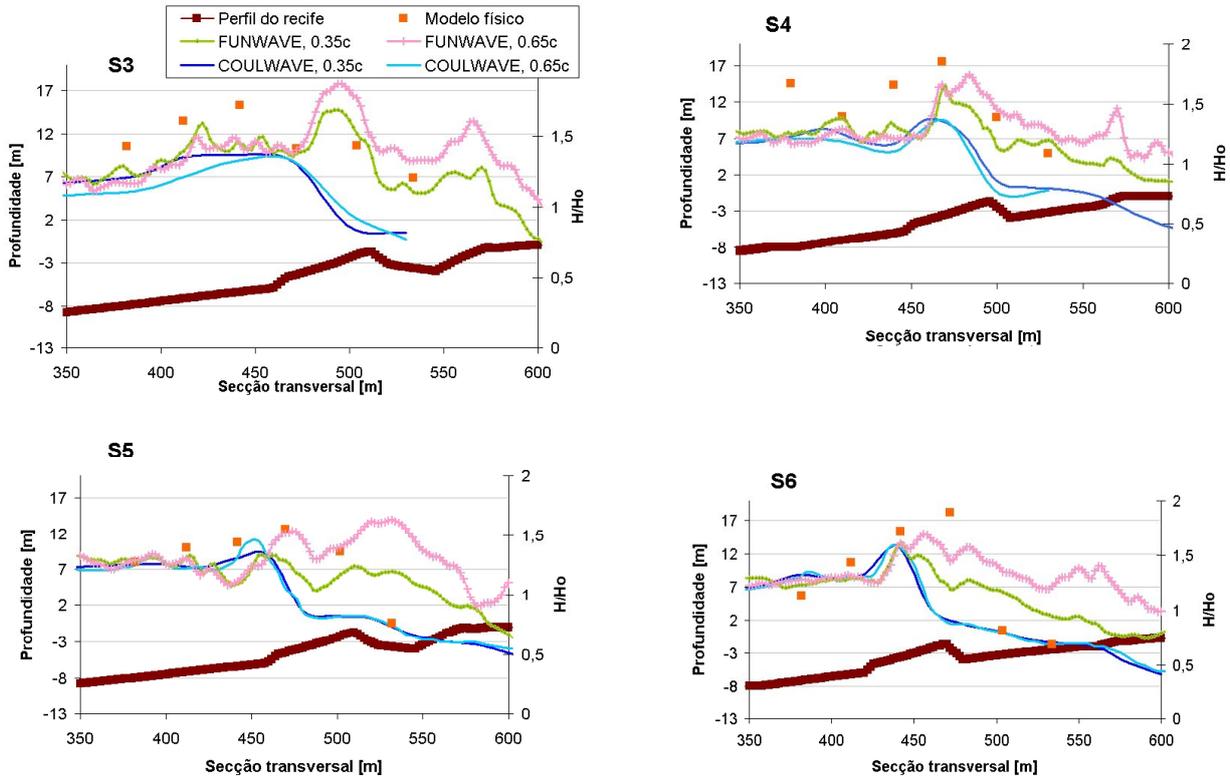


Figura 12. Códigos FUNWAVE e COULWAVE. Índices de agitação para  $T=15$  s,  $H=2.0$  m. Análise de sensibilidade para o parâmetro  $\zeta_i^{(l)} = 0.35c$  e  $\zeta_i^{(l)} = 0.65c$ , onde  $c = \sqrt{gh}$ . Secção transversal: a) Sonda S3; b) Sonda S4; c) Sonda S5; d) Sonda S6.

Figure 12. FUNWAVE and COULWAVE models. Breaking indexes for  $T=15$  s,  $H=2.0$  m. Sensitivity analysis for the parameter.  $\zeta_i^{(l)} = 0.35c$  and  $\zeta_i^{(l)} = 0.65c$ , where  $c = \sqrt{gh}$ . Cross sections with: a) Gauge S3; b) Gauge S4; c) Gauge S5; d) Gauge S6.

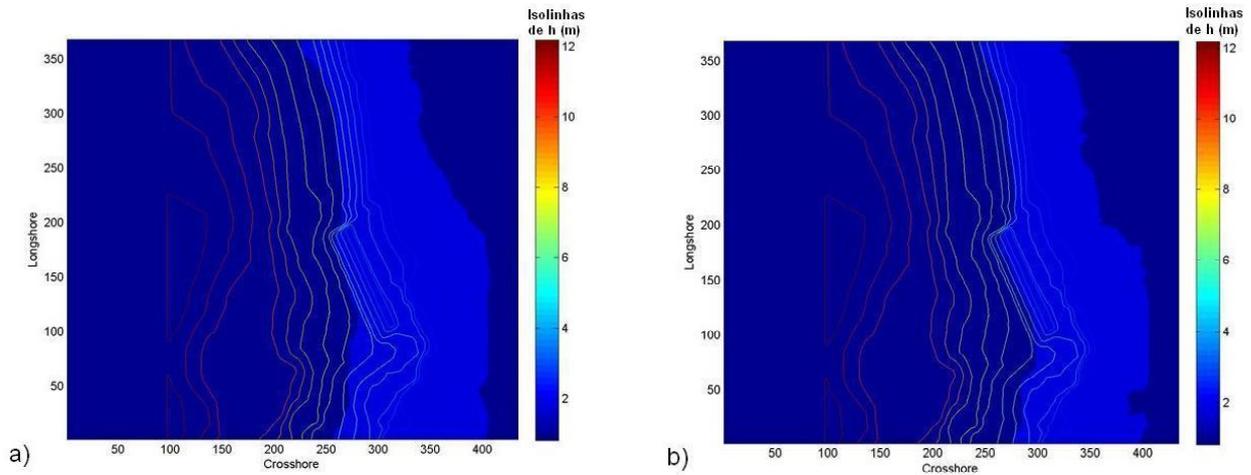


Figura 13. Código COULWAVE. Zonas de rebentação: a)  $\zeta_i^{(l)} = 0.35\sqrt{gh}$ ; b)  $\zeta_i^{(l)} = 0.65\sqrt{gh}$ , para uma onda incidente de T=19 s e H=2.0 m.

Figure 13. COULWAVE model. Breaking locations: a)  $\zeta_i^{(l)} = 0.35\sqrt{gh}$ ; b)  $\zeta_i^{(l)} = 0.65\sqrt{gh}$ , for an incident wave of T=19 s and H=2.0 m.

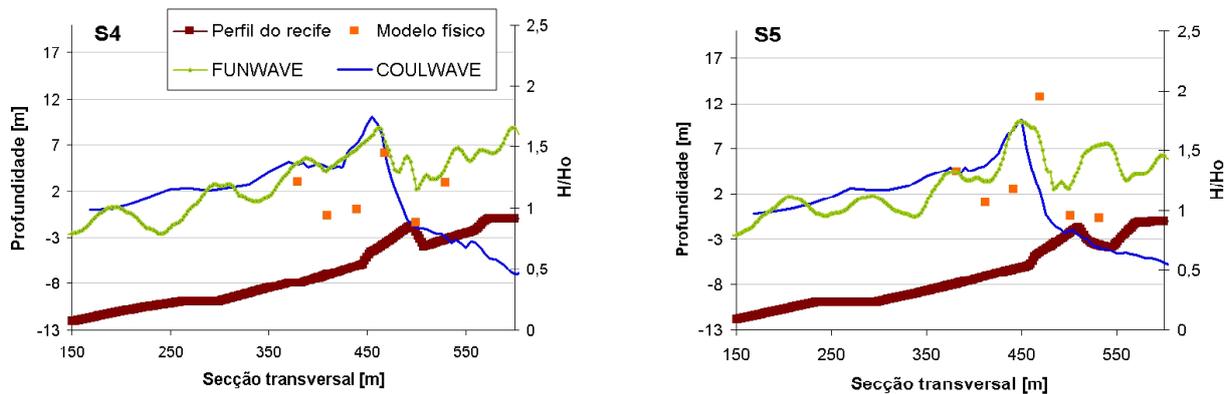


Figura 14. Códigos FUNWAVE e COULWAVE. Índices de agitação para T=19 s, H=2.0 m. Secção transversal com: a) Sonda S4; b) Sonda S5.

Figure 14. FUNWAVE and COULWAVE models. Breaking indexes for T=19 s, H=2.0 m. Cross sections with: a) Gauge S4; b) Gauge S5.

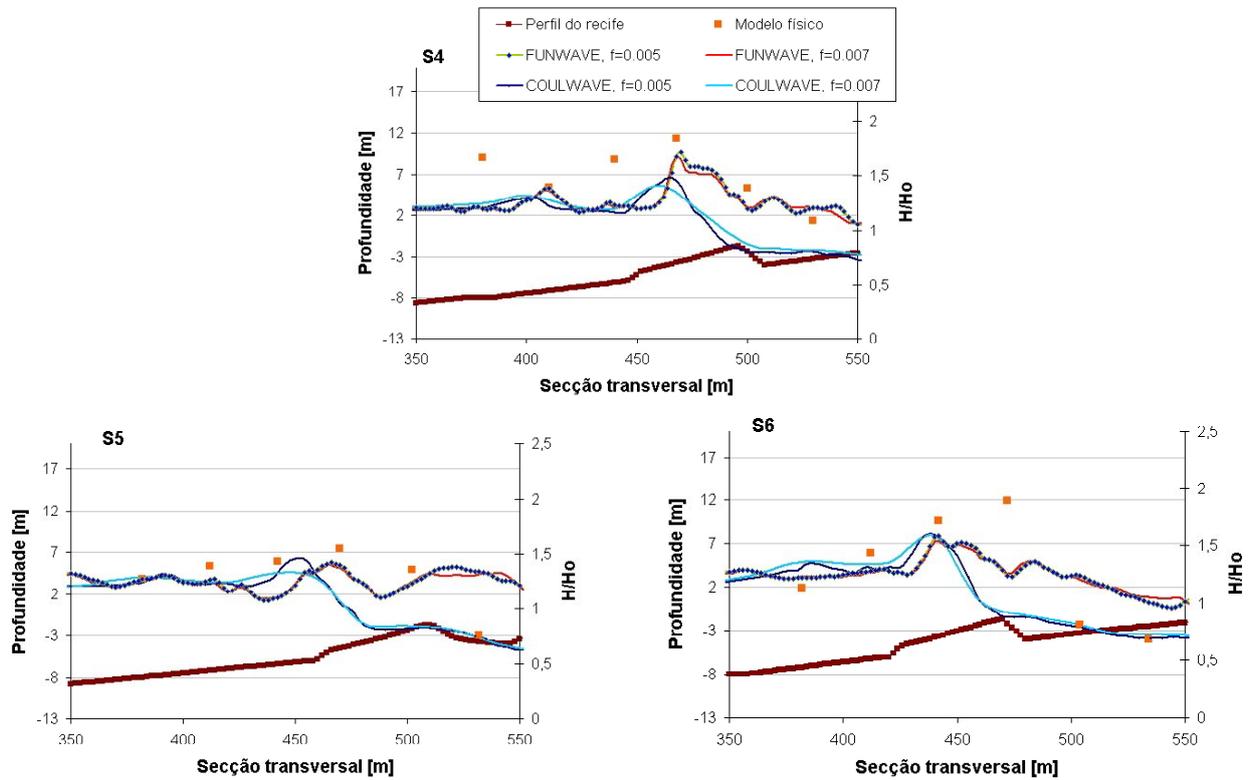


Figura 15. Códigos FUNWAVE e COULWAVE. Índices de agitação para  $T=15$  s,  $H=2.0$  m. Análise de sensibilidade para o parâmetro de atrito de fundo,  $f$ . Secções transversais com: a) Sonda S4; b) Sonda S5; c) Sonda S6.

Figure 15. FUNWAVE and COULWAVE models. Breaking indexes for  $T=15$  s,  $H=2.0$  m. Sensitivity analysis for the friction parameter,  $f$ . Cross sections for: a) Gauge S4; b) Gauge S5; c) Gauge S6.

## 5.2 Resultados

Os resultados dos modelos foram obtidos em todo o domínio de cálculo, e em particular, nas posições S1 a S6 (Figura 4c), onde existem medições no modelo físico. Primeiramente, comparam-se as elevações da superfície livre e os valores do índice de agitação obtidos numérica e experimentalmente, em secções ao longo do domínio de cálculo. Depois, comparam-se as linhas de rebentação. Finalmente, determina-se com base nos resultados numéricos, os dois parâmetros de surfabilidade: ângulo de rebentação e tipo de rebentação.

### 5.2.1 Elevação da superfície livre

Na Figura 16 e na Figura 17 apresentam-se os valores das elevações da superfície livre obtidas numérica e experimentalmente em pontos situados ao longo das posições P3 e P4, respectivamente, para a condição de agitação incidente  $T=15$  s,  $H=2.0$  m.

Observa-se que ambos os modelos geram ondas com características semelhantes na sonda S1 (Figura 16b) e equivalentes à obtida no modelo físico, sendo evidente a sua progressiva alteração na propagação, nas secções P3 e P4, com o aparecimento de características cada vez mais não lineares (cristas acentuadas e cavas achatadas), Figura 16 e Figura 17. É notória também a geração de harmónicas.

Da análise destas figuras verifica-se que, para a posição P3, o comportamento de ambos os modelos é bastante semelhante aos resultados experimentais, para todas as sondas consideradas. Neste caso o código COULWAVE reproduz melhor os resultados experimentais. Na posição P4, verifica-se que o código FUNWAVE reproduz melhor os resultados experimentais, sobretudo nas sondas S5 e S6, enquanto que com o código COULWAVE obtêm-se cristas mais baixas. De um modo geral, os modelos reproduzem bem a elevação da superfície livre.

### 5.2.2 Índices de agitação

Na Figura 18 e na Figura 19 os resultados dos códigos FUNWAVE e COULWAVE são comparados com os resultados experimentais em termos do índice de agitação para as secções transversais de quatro sondas (S3 a S6), para condições de agitação,  $\theta=220^\circ$ ,  $T=19$  s e nível médio, para  $H=2.0$  m e  $3.0$  m, respectivamente.

Da análise destas figuras, observa-se que o comportamento de ambos os modelos varia conforme a sonda analisada. No entanto, verifica-se que a rebentação ocorre, nos modelos numéricos, geralmente antes do que no modelo físico. A altura de onda aumenta até à zona de rebentação, e o seu valor máximo é semelhante para os dois modelos numéricos.

De modo a ter uma visão geral dos resultados no domínio de cálculo, apresentam-se na

Figura 20 e na Figura 21, os resultados dos códigos FUNWAVE e COULWAVE em termos da altura de onda média e zonas de rebentação, para  $T=19$  s,  $H=2.0$  m. Nestas figuras, pode-se observar o comportamento descrito anteriormente.

## 5.3 Parâmetros de surfabilidade

### 5.3.1 Parâmetros de dimensionamento de um recife

Uma das principais funções de um recife artificial para o surf é melhorar as condições para a prática do surf da zona. De uma forma genérica, pretende-se que esta estrutura induza ou melhore o tipo de rebentação, favoreça o aumento da altura de onda induzindo a rebentação num dado local e garanta que esta se efectue de forma gradual ao longo da crista da onda numa distância suficientemente longa.

No caso de recifes artificiais para a prática do surf, os parâmetros mais utilizados para análise do seu funcionamento são:

- A altura da onda ao longo da linha de rebentação;
- O ângulo de rebentação ao longo da linha de rebentação;
- O comprimento da linha de rebentação;
- O tipo de rebentação, determinado através do número de Iribarren ao longo da linha de rebentação;
- As características da parede da onda;
- A amplificação da altura da onda em relação à altura de onda incidente.

Estes parâmetros são designados como parâmetros de surfabilidade (“surfability parameters”). Os parâmetros são, logicamente, dependentes uns dos outros e também do nível dos surfistas (experiência

ou habilidade dos surfistas) para os quais se pretende dimensionar o recife. Embora as diferentes classificações para o nível dos praticantes de surf sejam subjectivas, existem várias classificações propostas, como, por exemplo, a de Walker (1974) e a de Hutt et al. (2001), ambas em função do ângulo de rebentação.

O ângulo de rebentação ao longo da linha de rebentação é definido como o ângulo entre a crista da onda e a linha de rebentação, a:

$$\sin \alpha = \frac{c}{V_s} \quad (13)$$

onde  $c$  é a velocidade de propagação da onda e  $V_s$  a velocidade do surfista.

Seguindo a metodologia de Walker (1974) o ângulo de rebentação está associado ao nível de dificuldade na execução de manobras na onda, Tabela 2.

O tipo de rebentação, determinado através do número de Iribarren ao longo da linha de rebentação,  $\xi_b$ , é definido por:

$$\xi_b = \frac{s}{\sqrt{H_b / L_0}} \quad (14)$$

onde  $s$  é o declive na zona do recife,  $H_b$  a altura de rebentação da onda e  $L_0$  o comprimento de onda ao largo. Na Tabela 3, apresenta-se a classificação do tipo de rebentação em função do número de Iribarren, segundo proposta de Battjes (1974).

### 5.3.2 Cálculos efectuados

Com base nos resultados dos modelos no que se refere à altura da onda e à direcção de propagação da onda ao longo de cada uma das sete secções definidas na Figura 4c, foi calculado o número de Iribarren e o ângulo de rebentação ao longo da linha de rebentação.

Na Figura 22 apresenta-se a posição da linha de rebentação, os valores do número de Iribarren e do ângulo de rebentação ao longo da linha de rebentação obtidos com o código FUNWAVE para as condições de agitação  $T=11$  s e para  $H=1$  m e  $H=2$  m.

Da Figura 23 à Figura 25, apresentam-se a posição da linha de rebentação, os valores do número de Iribarren e do ângulo de rebentação ao longo da linha

de rebentação obtidas com os códigos COULWAVE e FUNWAVE, para as condições de agitação  $T=11$  s,  $T=15$  s e  $T=19$  s, para  $H=2$  m.

Das figuras efectuadas, observa-se que a posição da linha de rebentação é próxima em ambos os códigos, especialmente para os maiores períodos, assim como o ângulo de rebentação com diferenças máximas de  $4^\circ$ . Quanto ao tipo de rebentação os dois códigos, embora com ligeiras diferenças no número de Iribarren, prevêem rebentação do tipo mergulhante ( $0.4 < \xi_b < 2.0$ ) ao longo de toda a linha de rebentação, o que representa o tipo de rebentação adequada para a prática de surf de nível avançado. Este tipo de rebentação também se verificou nos ensaios em modelo físico.

Para a gama de períodos testados, há uma diminuição dos valores do número de Iribarren com a altura da onda incidente e um aumento com o período.

Quanto ao ângulo de rebentação obtido, é sempre inferior a  $31^\circ$  (Figura 22 a Figura 25) para ambos os códigos, o que representa uma velocidade adequada para surfistas experientes, de acordo com a Tabela 2. No entanto, convém referir que este valor não deve ser muito inferior já que, quando o ângulo de rebentação é inferior a  $25^\circ$ , a velocidade torna-se demasiado elevada para os surfistas tornando impossível a prática do surf. Estes resultados estão de acordo com os obtidos nos ensaios em modelo físico.

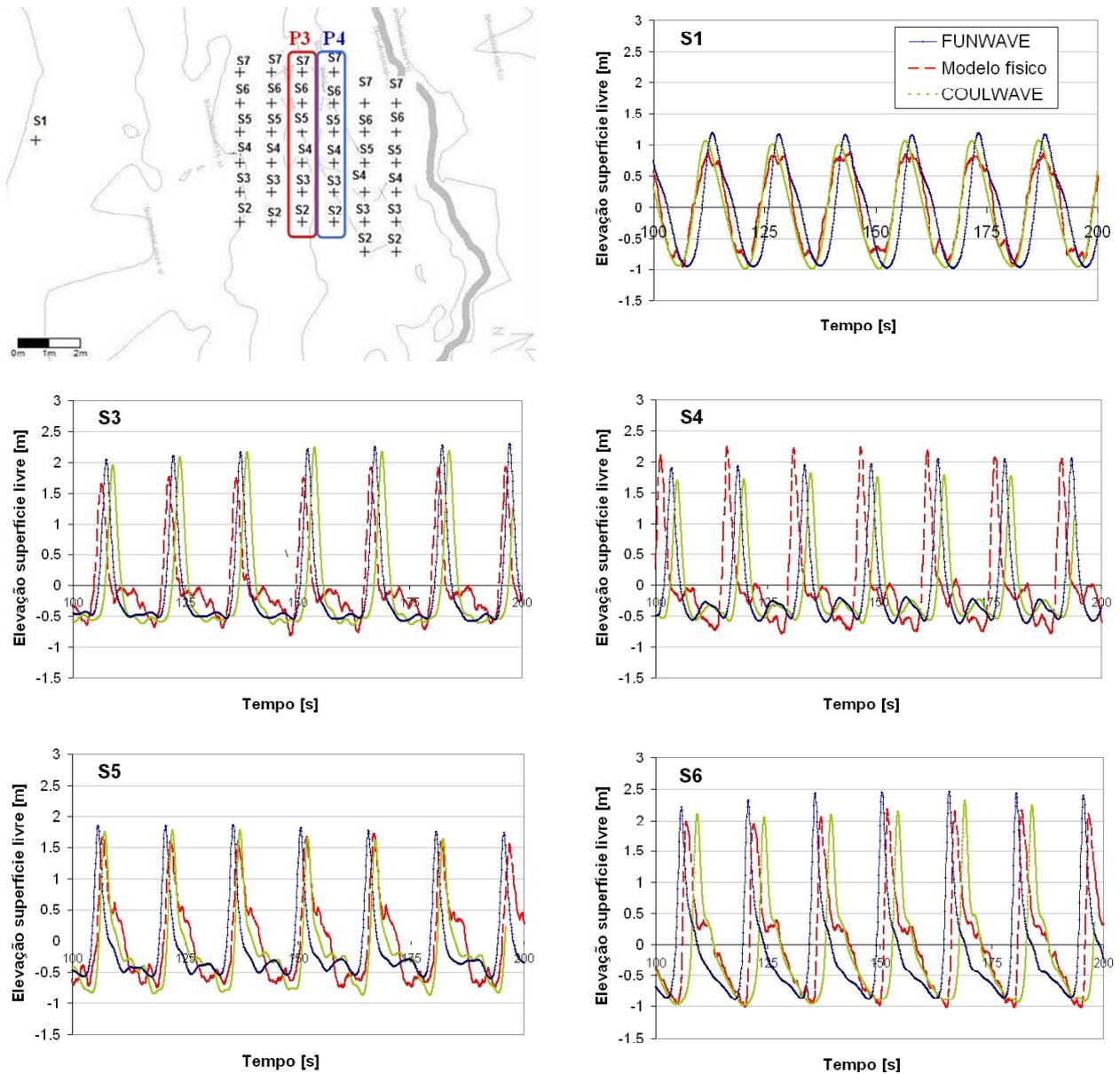


Figura 16. Séries de elevação da superfície livre para as sondas S1 e S3 a S6 colocadas na posição P3. Comparação entre o modelo físico e os códigos FUNWAVE e COULWAVE.

Figure 16. Time series of free surface elevation for gauges S3 to S6 located in the position P3. Comparison between the physical model and the numerical models FUNWAVE and COULWAVE.

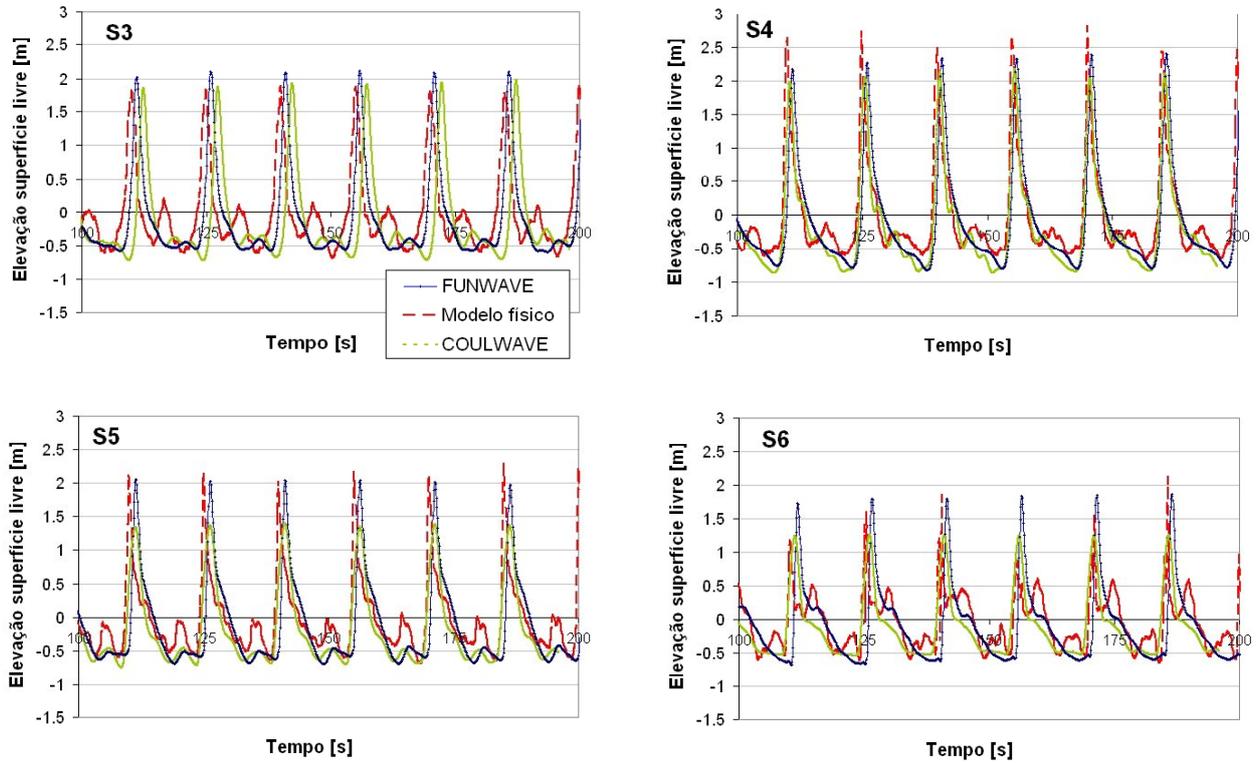


Figura 17. Séries de elevação da superfície livre para as sondas S3 a S6 colocadas na posição P4. Comparação entre o modelo físico e os códigos FUNWAVE e COULWAVE.

Figure 17. Time series of free surface elevation for gauges S3 to S6 located in the position P4. Comparison between the physical model and the numerical models FUNWAVE and COULWAVE.

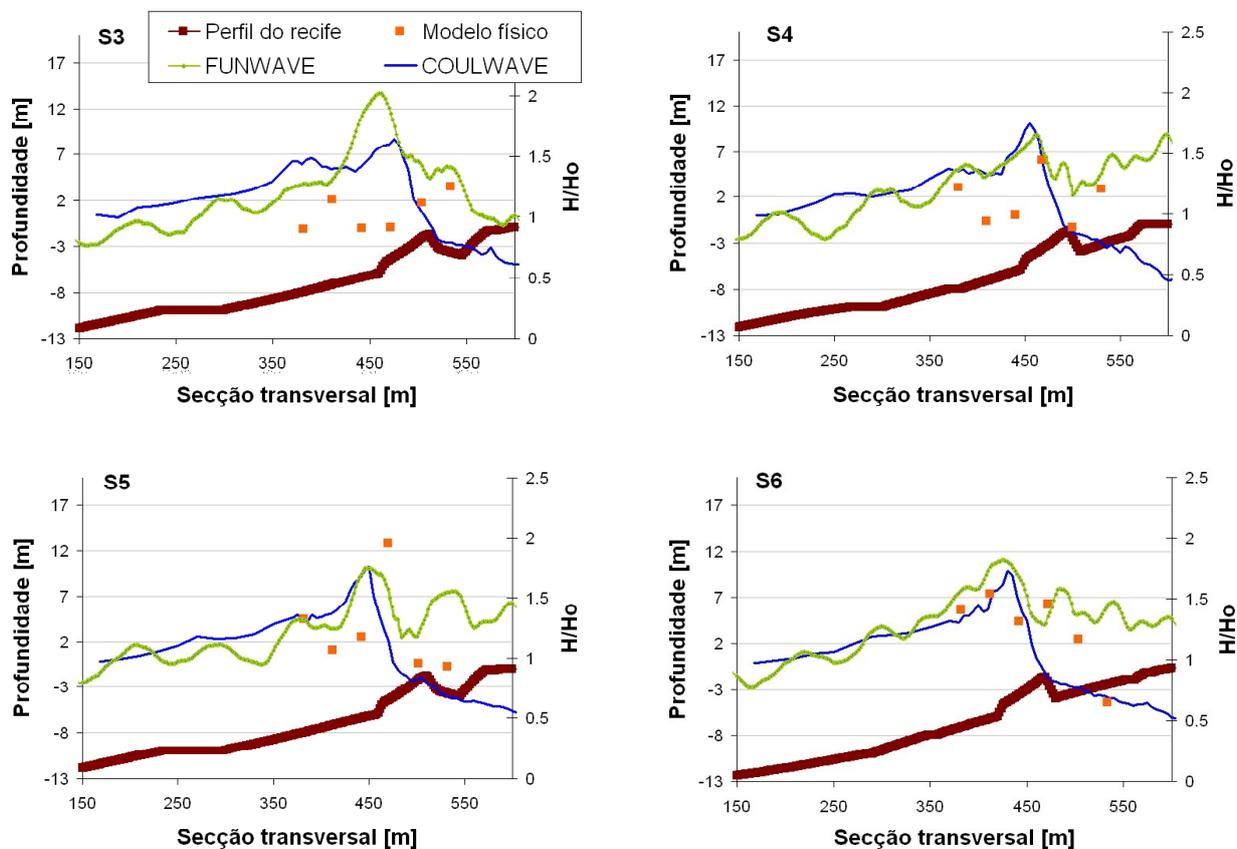


Figura 18. Códigos FUNWAVE e COULWAVE. Índices de agitação para  $T=19$  s,  $H=2.0$  m, nas secções transversais das sondas S3 a S6.

Figure 18. FUNWAVE and COULWAVE models. Breaking indexes for  $T=19$  s,  $H=2.0$  m, in cross sections with gauges S3 to S6.

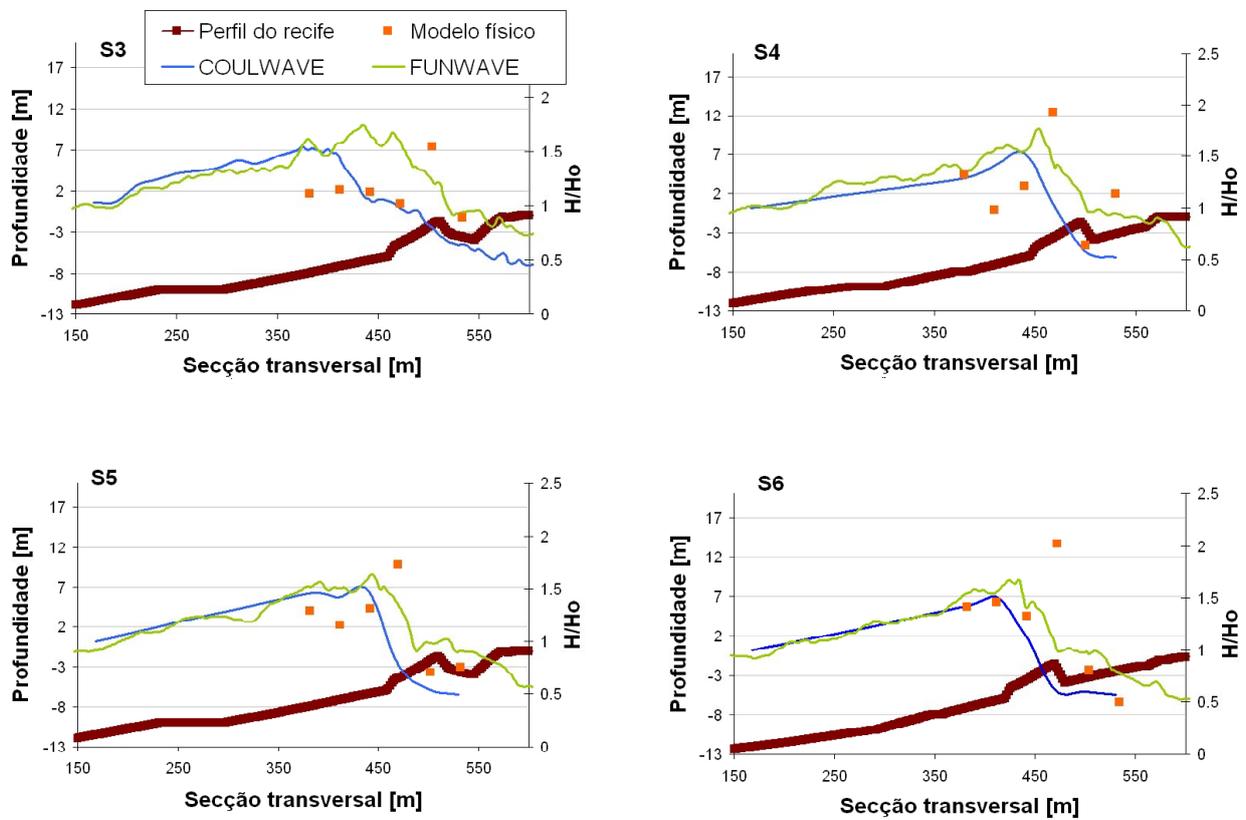


Figura 19. Códigos FUNWAVE e COULWAVE. Índices de agitação para  $T=19$  s,  $H=3.0$  m, nas secções transversais das sondas S3 a S6.

Figure 19. FUNWAVE and COULWAVE models. Breaking indexes for  $T=19$  s,  $H=3.0$  m, in cross sections for gauges S3 to S6.

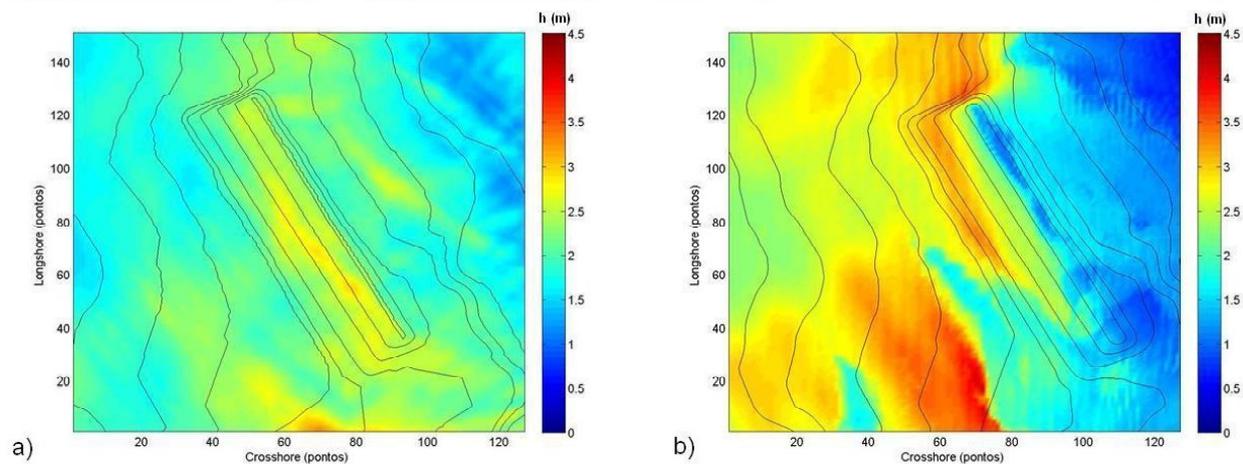


Figura 20. Alturas de onda: a) FUNWAVE; b) COULWAVE, para uma onda incidente,  $T=19$  s e  $H=2.0$  m.  
Figure 20. Wave height: a) FUNWAVE; b) COULWAVE, for an incident wave with  $T=19$  s and  $H=2.0$  m.

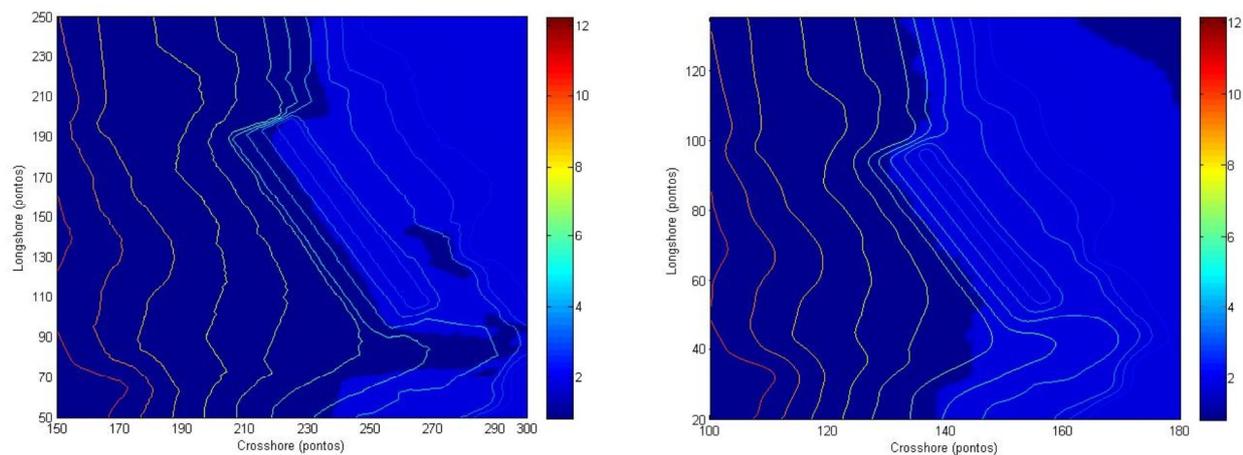


Figura 21. Zonas de rebentação: a) FUNWAVE; b) COULWAVE, para uma onda incidente,  $T=19$  s, e  $H=2.0$  m.  
Figure 21. Breaking locations: a) FUNWAVE; b) COULWAVE, for an incident wave with  $T=19$  s and  $H=2.0$  m.

Tabela 2. Relação entre o ângulo de rebentação e o nível de dificuldade da onda (Walker, 1974).

Table 2. Methodology to calculate the relation between the peel angle and the difficulty level of the surfing wave (Walker, 1974).

Nível	Descrição	$\alpha$ (°)
1	Iniciados	90
2	Iniciados capazes de surfar lateralmente ao longo da crista de rebentação	70
3	Surfistas que conseguem aumentar a velocidade na face da onda	60
4	Surfista a aprender as manobras <i>standard</i> do surf	55
5	Surfistas capazes de realizar as manobras <i>standard</i> do surf numa única onda	50
6	Surfistas que executam manobras <i>standard</i> de surf consecutivamente	40
7	Surfistas que executam manobras avançadas	29
8	Surfistas profissionais	27

Tabela 3. Classificação do tipo de rebentação segundo o valor do número de Iribarren (Battjes, 1974).

Table 3. Categorization of the breaking type using the Iribarren number (Battjes, 1974).

Tipo de rebentação	Número de Iribarren
Progressiva	$\xi_b < 0.4$
Mergulhante	$0.4 < \xi_b < 2.0$
De fundo	$\xi_b > 2.0$

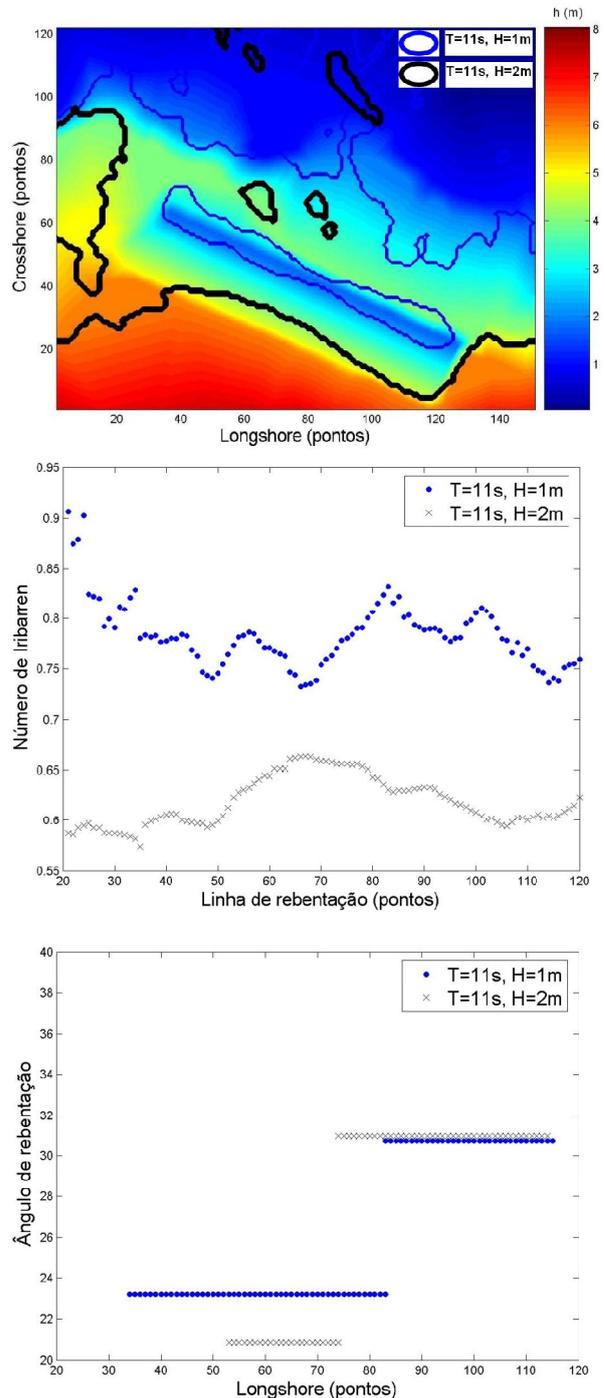


Figura 22. Código FUNWAVE, onda incidente de T=11 s, H=1 m e T=11 s H=2 m. Comparação entre a posição da linha de rebentação, o número de Iribarren e o ângulo de rebentação.

Figure 22. FUNWAVE model, incident wave of T=11 s, H=1 m and T=11 s, H=2 m. Comparison for breaking locations, Iribarren number and peel angle.

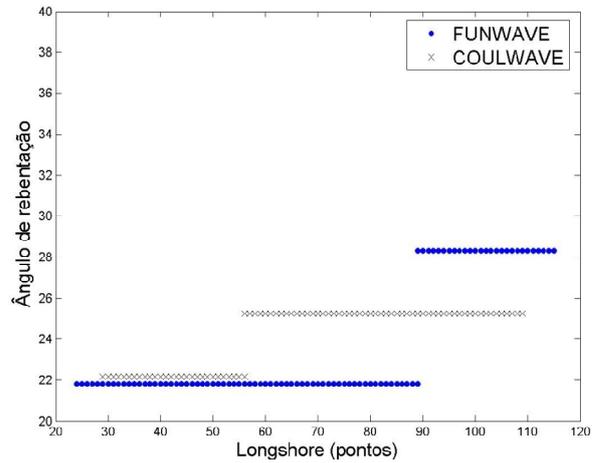
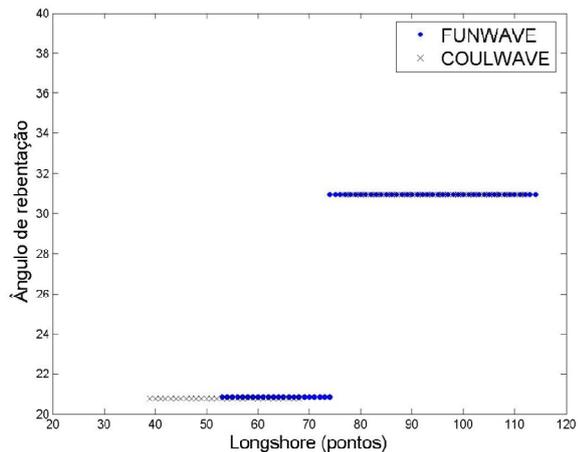
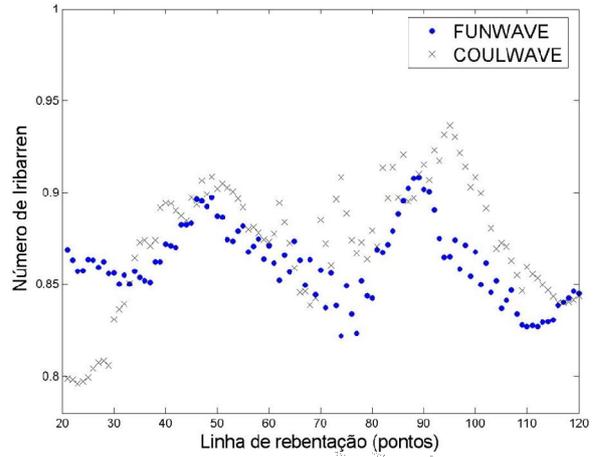
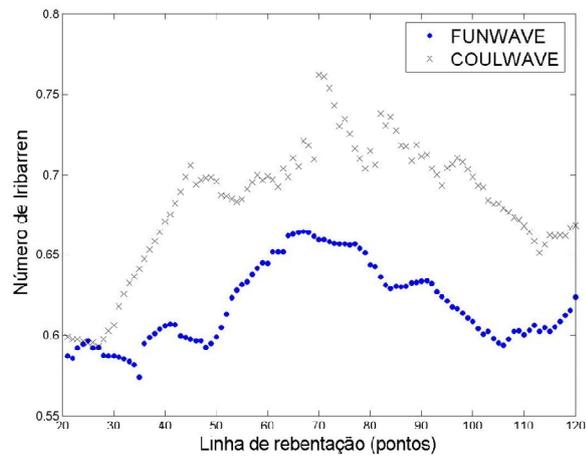
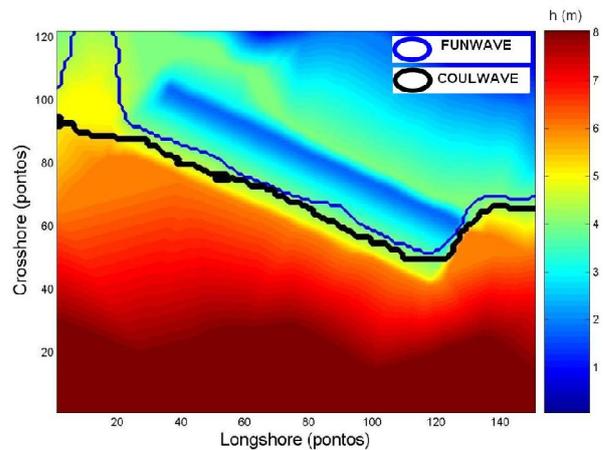
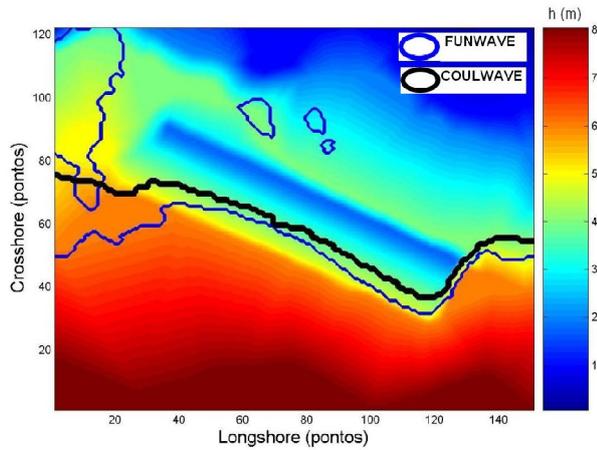


Figura 23. Códigos FUNWAVE e COULWAVE, onda incidente de  $T=11$  s,  $H=2$  m. Comparação entre a posição da linha de rebentação, o número de Iribarren e o ângulo de rebentação.

Figure 23. FUNWAVE and COULWAVE, incident wave of  $T=11$  s,  $H=2$  m. Comparison between breaking lines, Iribarren number and peel angle.

Figura 24. Códigos FUNWAVE e COULWAVE, onda incidente de  $T=15$  s,  $H=2$  m. Comparação entre a posição da linha de rebentação, o número de Iribarren e o ângulo de rebentação.

Figure 24. FUNWAVE and COULWAVE, incident wave of  $T=15$  s,  $H=2$  m. Comparison between breaking lines, Iribarren number and peel angle.

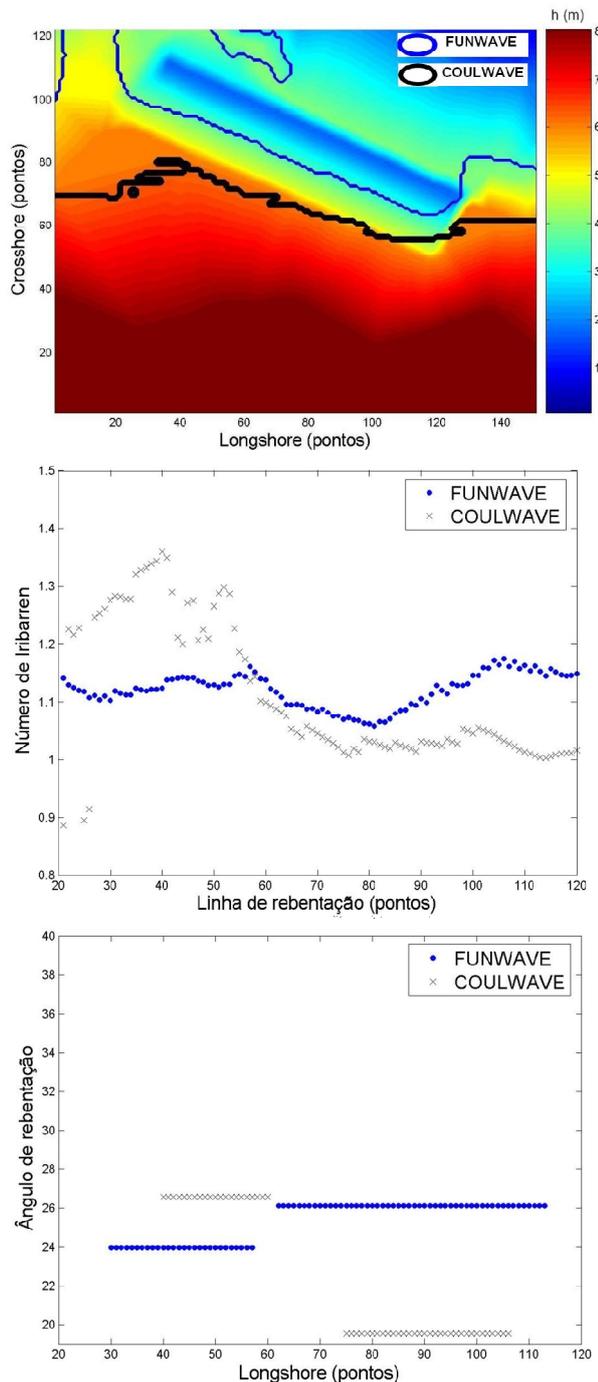


Figura 25. Códigos FUNWAVE e COULWAVE, onda incidente de  $T=19$  s,  $H=2$  m. Comparação entre a posição da linha de rebentação, o número de Iribarren e o ângulo de rebentação.

Figure 25. FUNWAVE and COULWAVE, incident wave of  $T=19$  s,  $H=2$  m. Comparison between breaking lines, Iribarren number and peel angle.

## 6. CONCLUSÕES

Neste artigo apresenta-se a aplicação de dois códigos numéricos baseados nas equações de Boussinesq estendidas (FUNWAVE e COULWAVE) ao estudo da hidrodinâmica em torno de um recife artificial para a prática do surf em São Pedro do Estoril, Cascais, Portugal. Os resultados obtidos foram comparados com os dados provenientes de ensaios em modelo físico realizados no LNEC para este caso de estudo, permitindo avaliar a forma como os modelos reproduzem a propagação e deformação de ondas sobre o recife.

A comparação dos resultados numéricos e experimentais foi realizada em termos das séries de elevação da superfície livre e das respectivas alturas de onda obtidas ao longo do domínio de cálculo. De um modo geral, os modelos reproduzem bem a forma da elevação da superfície livre para as condições de agitação e nível de maré analisados. No entanto, verifica-se que a rebentação ocorre, nos modelos numéricos, geralmente antes (no espaço) do que modelo físico. Dado que ambos os modelos apresentam algumas limitações na simulação da rebentação de ondas, a qual está fortemente dependente dos parâmetros intrínsecos ao modelo de rebentação e que devem ser calibrados para cada caso, verificou-se ser necessário efectuar uma análise de sensibilidade mais detalhada da influência destes parâmetros nos resultados dos modelos de forma a escolher adequadamente os valores a utilizar em cada caso.

Finalmente, e apenas com base nos resultados numéricos, determinaram-se os parâmetros de surfabilidade (ângulo de rebentação e tipo de rebentação) que caracterizam o funcionamento do recife para a prática do surf. Verificou-se que os resultados dos modelos para os casos testados, no que se refere a estes dois parâmetros, são bastante semelhantes, ambos prevendo uma rebentação do tipo mergulhante e um valor do ângulo de rebentação ao longo da linha de rebentação inferior a  $32^\circ$ . Estes resultados, tal como com os resultados do modelo físico para estes casos, indicam que o recife induz boas condições para a prática de surf.

Embora os resultados dos modelos possam ser melhorados com uma escolha mais adequada dos

parâmetros do modelo, os códigos FUNWAVE e COULWAVE mostraram ser uma ferramenta adequada para o estudo da hidrodinâmica em torno de um recife artificial para a prática do surf e do seu funcionamento. Assim, considera-se que estes modelos são adequados para otimizar uma solução preliminar de recife (geometria e localização do recife), a ser ensaiada posteriormente em modelo físico.

#### AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi desenvolvido no âmbito dos projectos de investigação “Novos conceitos de protecção para a costa Portuguesa” (PTDC/ECM/66516/2006) e “Interacção entre a rebentação das ondas e o transporte de areias” (PTDC/ECM/67411/2006) financiados pela FCT - Fundação para a Ciência e a Tecnologia, Portugal.

#### BIBLIOGRAFIA

- Battjes, J.A., 1974. Computation of set-up, longshore currents, run-up and overtopping due to wind-generated waves. Ph. D. thesis. Technical University of Delft.
- Bicudo, P., Cardoso, N., 2007a. Modelação numérica para a orientação e declive do topo do recife, Relatório CMC/IST/FCUL/LNEC- MOD\_IST/07 -30/11/2007.
- Bicudo, P., Cardoso, N., 2007b. Parâmetros para a implantação do modelo físico do recife para o surf de São Pedro no tanque de ondas do LNEC, Relatório CMC/IST/FCUL/LNEC- COOR/15 -30/11/2007.
- Chen, Q., Kirby, J. T., Dalrymple, R. A., Kennedy, B. A., Chawla, A., 2000. Boussinesq modeling of wave transformation, breaking, and runup. II: 2D. *J. Waterways, Port, Coastal and Ocean Engineering*, 126, 48–56.
- Dalrymple, R. A., Kirby, J. T., 1991. REFDIF 1, Version 2.3, Documentation Manual. Combined Refraction/Diffraction Model. CARC Report 91-91, Univ. Delaware.
- Fortes, C.J., Capitão, R., Neves, M.G., Monteiro, P.P., Mendes, L.S., 2007. Viabilidade da implementação de um recife artificial para a prática de surf na praia de São Pedro do Estoril e criação de uma estrutura de protecção e amarração do submarino Barracuda. Estudos de modelação numérica e física. Regimes de agitação marítima. Relatório 172/07–NPE, LNEC, Abril.
- Fortes, C. J., Neves, M. G., Mendonça, A., Pinheiro, L., Lourenço, M., Monteiro, P., Palha, A., Bicudo, P., Cardoso, N., 2008a. An artificial surfing reef in São Pedro do Estoril beach, Portugal. Numerical and physical modeling studies. Proc. Int Conf in Coastal Engineering, Hamburg, 30 Aug to 5 Sep.
- Fortes, C.J.E.M., Neves, M.G., Pinheiro, L., 2008b. Viabilidade da implementação de um recife artificial para a prática de surf na praia de São Pedro do Estoril e criação de uma estrutura de protecção e amarração do submarino Barracuda. Estudos de modelação numérica e física. Estudo, em modelo físico, da solução para o recife artificial para surf. Relatório 373/2008-NPE, LNEC, Novembro.
- Fortes, C. J., Okamoto, T., Palha, A.C., 2007. Análise da formulação da rebentação no modelo FUNWAVE. Proc. 5<sup>as</sup> Jornadas Portuguesas de Engenharia Costeira e Portuária, Lisboa 11-12 Outubro.
- Hughes, S.A., 1993. Physical models and laboratory techniques in coastal engineering. Singapore: World Scientific, 568 pp.
- Hutt, J.A., Black, K.P., Mead, S.T., 2001. Classification of surf breaks in relation to surfing skill. In: Black, K.P. (ed.), Natural and Artificial reefs for Surfing and Coastal Protection. *Journal of Coastal Research Special Issue No. 29*, pp. 66-81.
- Kamphuis, J. W., 1996. Physical modelling of coastal processes. *Advances in Coastal and Ocean Engineering*, Singapore: World Scientific, 79-114.
- Kennedy, A.B., Chen, Q., Kirby, J.T., Dalrymple, R.A., 2000. Boussinesq Modeling of Wave Transformation, Breaking and Runup I: 1D. *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, ASCE, Vol. 126, No. 1, Janeiro/ Fevereiro, 39-47.
- Kirby, J.T., Wei, G., Chen, Q., Kennedy, A. B., Dalrymple, R. A., 1998. FUNWAVE 1.0 – Fully Nonlinear Boussinesq Wave Model Documentation and User’s Manual. Research Report No.CACR-98-06. Center for Applied Coastal Research, University of Delaware.
- Korthenhaus, A., Van der Meer, J., Burchart, H.F., Geeraerts, J., Pullen, T., Ingram, D., Troch, P., 2005.

- Quantification of Measurement Errors, Model and Scale Effects related to Wave Overtopping. CLASH report, 56 pp.
- Lynett, P., Liu, P.L.-F., 2004. Modelling wave generation, evolution and interaction with Depth-Integrated, Dispersive Wave equations. COULWAVE Code Manual. Cornell Univ. Long Inter. Wave Modelling Package.
- Toumazis, A.D., Anastasious, K., 1990. Scale effects in Breaking waves. Proc. Coastal Engineering, vol 1, 973-985
- Walker, J. R., 1974. Recreational surf parameters. Tech. Report 30. University of Hawaii, James K. K. Look Laboratory of Oceanographic Engineering.
- Walker, J. R., 1974. Recreational surf parameters. Tech. Report 30. University of Hawaii, James K. K. Look Laboratory of Oceanographic Engineering.
- Wei, G., Kirby, J. T., Sinha, A., 1999. Generation of waves in Boussinesq models using a source function method, Coastal Engineering, 36, 271-299.
- Wei, G., Kirby, J. T., Grilli, S. T., Subramanya, R., 1995a. A fully nonlinear Boussinesq model for surface waves. I: Highly nonlinear, unsteady waves. J. Fluid Mech., Cambridge, England, 294, 71-92.
- Wei, G., Kirby, J. T., Grilli, S.T., Subramanya, R., 1995b. A time-dependent numerical code for extended Boussinesq equations, J. Waterway, Port, Coastal Ocean Engng. 120: 251-261, 1995.
- Zelt, J. A., 1991. The run-up of nonbreaking and breaking solitary waves, Coastal Engrg., 15, 205-246.

