

A APLICABILIDADE DE DISTRIBUIÇÕES BASEADAS EM LEIS DE POTÊNCIA NA AVALIAÇÃO DE CAUDAIS DE CHEIA

THE APPLICABILITY OF DISTRIBUTIONS BASED ON POWER-LAW STATISTICS FOR FLOOD FLOWS ASSESSMENT

Rui M. N. V. V. Apolinário

Engenheiro Civil. COBA – Consultores para Obras, Barragens e Planeamento, S.A. // Av. 5 de Outubro, 323, 1649-011 Lisboa // rva@coba.pt

RESUMO: Na avaliação de caudais de ponta de cheia várias vias têm sido seguidas, em função das circunstâncias da informação disponível, dos objectivos de análise e da amplitude da extrapolação que tem de ser levada a cabo. Quando se tem acesso a registos de caudais máximos históricos é procedimento comum estimar os caudais de dimensionamento, para períodos de retorno T elevados, utilizando o melhor ajuste dos valores a funções de distribuição estatísticas teóricas. O presente artigo apresenta uma via alternativa em que se ajustaram leis de potência a valores observados de séries de duração parcial de caudais médios diários elevados, Q , e deste modo inferir acerca da sua frequência, em funções do tipo $Q \sim T^\alpha$. As leis de potência são casos particulares das distribuições de Lévy-estável e apresentam caudas “grossas” para valores de α inferiores a 2. Aplicou-se esta metodologia a cinco rios portugueses com bacias de drenagem variando entre 140 e 91 500 km². Obtiveram-se valores de α entre 0.48 e 0.73.

Palavras-chave: Caudais de cheia, Inferência estatística; Leis de potência; Objectos fractais; Distribuições de Levy-estável; Caudas grossas.

ABSTRACT: The correct assessment of floods is vital for planning and construction of hydraulic structures. In the peak flows assessment many different methods have been utilized, according to the available data, the purposes of the analysis and the amplitude of the extrapolation that should be carried out. When it is available historical records of peak floods, it is a common procedure to assess the design peak floods using known theoretical statistical distributions for large return periods, T . The present paper presents an alternative procedure in which the historical data of partial duration of daily peak flows, Q , are adjusted to power laws and then can be inferred it's frequency using an expression of the type $Q \sim T^\alpha$. Power laws are particular cases of Lévy-stable distributions and they present heavy tails for α values minor to 2. We have applied this procedure in five portuguese rivers with catchments areas between 140 and 91 500 km². We have obtained α values between 0.48 and 0.73.

Keywords: Flood flows; Statistical inference; Power laws; Fractals; Levy-stable distributions; Heavy tails.

1. INTRODUÇÃO

As cheias são um fenómeno complexo envolvendo processos hidro-meteorológicos, sendo em alguns casos também influenciadas pela actividade antropogénica. As suas consequências podem acarretar perdas de vidas humanas e danos económicos elevados, pelo que a sua correcta avaliação é de importância vital para o planeamento e construção de infra-estruturas hidráulicas.

Na avaliação de caudais de ponta de cheia várias vias têm sido seguidas, em função das circunstâncias da informação disponível, dos objectivos de análise e da amplitude da extrapolação que tem de ser levada a cabo. De um modo geral, sempre que o objectivo da análise é o dimensionamento de uma infra-estrutura hidráulica para um risco de insucesso reduzido, devido aos custos financeiros inerentes e eventuais perdas de vida humanas que lhe estariam associados, pretende estimar-se caudais de ponta de cheia para frequências de excedência muito reduzidas (ou períodos de retorno muito elevados), normalmente muito inferiores às frequências empíricas dos valores observados e disponíveis (SERRA, 2000).

O período de retorno T , ou a probabilidade de ocorrência associada à cheia de projecto $F(x) = 1 - (1/T)^r$ são determinados pelo risco - ou probabilidade de insucesso r - aceite para o tempo de vida V de determinada estrutura e relacionam-se por: $r = 1 - (1 - 1/T)^V$. A fixação do valor de T , para determinada infra-estrutura hidráulica a projectar, depende assim dos valores fixados para r e V .

É bastante frequente fixarem-se períodos de retorno T de 100, 500, 1000 e mesmo até de 10 000 anos para o dimensionamento de obras hidráulicas, nomeadamente de barragens, diques, açudes, etc.

Assim, o problema de extrapolação de valores está presente em praticamente todos os modelos estatísticos desenvolvidos com vista à estimação de caudais de ponta de cheia. Situação esta, que se deve ao facto de se terem dados hidro-meteorológicos registados e disponíveis, na melhor das hipóteses, com cerca de 100 anos, sendo o mais frequente dispor-se de amostras com períodos históricos bastante menos longos. Apenas os modelos que incorporam informação paleontológica estarão isentos de erros de extrapolação, sendo porém afectados por outros erros, como sejam os associados à avaliação de caudais por métodos indirectos e à incerteza quanto à sua datação.

Os modelos mais habitualmente utilizados em inferência sobre caudais de ponta de cheia, baseiam-se na análise estatística das séries de valores de caudais máximos (cheias) observados numa dada secção de uma linha de água.

Alguns destes modelos utilizam caudais de cheia máxima anual e baseiam-se na teoria paramétrica assintótica de valores extremos, na designada família GEV (*General Extreme-Value*), que sofreu um forte impulso com o trabalho de GUMBEL (1960), constituídas pelas designadas distribuições de Fisher-Tippett, divididas nos seguintes tipos:

- Tipo I – Distribuição de Gumbel
- Tipo II – Distribuição de Fréchet
- Tipo III – Distribuição de Weibull

A função de distribuição GEV generalizada é dada por:

$$F(x) = e^{-\left[1 - k\left(\frac{x-u}{\alpha}\right)\right]^{1/k}} \quad (\text{para } k \neq 0) \quad (1)$$

Em que u , k e α representam, respectivamente, um parâmetro de localização, de forma e de escala.

De notar que a distribuição de Gumbel (Tipo I) se obtém quando $k = 0$. Para $k < 0.3$ a forma geral da distribuição GEV é semelhante à de Gumbel, embora a cauda direita da função seja mais «grossa» se $k < 0$ e mais «fina» para $k > 0$.

Para $k > 0$, a distribuição GEV tem uma fronteira superior limitada em $u + \alpha/k$ e corresponde à distribuição do Tipo III. Para $k < 0$, a distribuição apresenta uma cauda direita «grossa» que corresponde à distribuição do Tipo II. Quando $k = 1$ a equação anterior transforma-se numa distribuição exponencial inversa, ou seja, $1 - F(x)$ será a função de distribuição cumulativa da distribuição exponencial (HOSKING e WALLIS, 1997).

Outra família de funções de distribuição, que são também comumente utilizadas, é a baseada na distribuição Gama, dadas pelas distribuições de Pearson e log-Pearson do tipo III. Esta última é, aliás, o modelo recomendado oficialmente nos EUA e na Austrália, para a análise da distribuição de frequências de caudais de cheia, sendo a sua função de densidade de probabilidade dada por:

$$f(x) = \frac{(\log x - c)^{\beta-1} e^{-\left[\frac{(\log x - c)}{\alpha}\right]}}{x \alpha^{\beta-1} |\alpha| \Gamma(\beta)} \quad (2)$$

O texto deste artigo foi submetido para revisão e possível publicação em Julho de 2010, tendo sido aceite pela Comissão de Editores Científicos Associados em Outubro de 2010. Este artigo é parte integrante da *Revista Recursos Hídricos*, Vol. 31, Nº 2, 43-59, Novembro de 2010. © APRH, ISSN 0870-1741

Sendo c , α e β parâmetros de localização, escala e forma, respectivamente, no espaço da variável transformada de $\log x$ e $\Gamma(\cdot)$ representa a função Gama. Para $\alpha > 0$ e limite inferior $c=0$ a distribuição de Pearson tipo III reduz-se à distribuição Gama. Por vezes utiliza-se a distribuição de Pearson com $\alpha < 0$ dando uma assimetria negativa à função com limite superior c .

Para uma média e variância fixada, no limite, quando o coeficiente de forma β tende para infinito (e o coeficiente de assimetria tende para zero), a distribuição de Pearson tipo III tende para a distribuição Normal. Para $\beta < 1$ e coeficiente de assimetria superior a 2, a função densidade de probabilidade tende para infinito na cauda esquerda. Para $\beta=1$ e coeficiente de assimetria igual a 2, obtém-se a função exponencial de dois parâmetros (STEDINGER et al., 1993).

Outra família de distribuições também largamente utilizada baseia-se na distribuição normal, sendo as mais utilizadas a log-normal de 2 parâmetros (Hazen) e a log-normal de 3 parâmetros (Galton).

As funções de densidade de probabilidade são dadas, respectivamente, por:

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left[\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right]} \quad (3)$$

$$f(x) = \frac{1}{(x-c)\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left[\frac{(\log(x-c) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right]} \quad (4)$$

Em que c representa um parâmetro de localização e μ e σ são, respectivamente, a média e o desvio padrão. Entretanto, nos últimos anos, tem-se também aplicado a distribuição generalizada de Pareto (GPD) a séries parciais de caudais acima de um determinado valor limite pré-fixado, na designação anglo-saxónica, Peak Over Threshold (POT). A expressão da função de densidade de probabilidade desta última família de modelos de distribuição é dada por:

$$f(x) = \left(\frac{1}{\alpha}\right) \left[1 - k \frac{(x-u)}{\alpha}\right]^{1/k-1} \quad (\text{para } k \neq 0) \quad (5)$$

Em que u , k e α representam um parâmetro de localização, de forma e de escala, respectivamente. Para $k = 0$ a distribuição anterior transforma-se na distribuição exponencial de dois parâmetros; para $k = 1$ será a distribuição uniforme no intervalo $u \leq x \leq u + \alpha$ (HOSKING e WALLIS, 1997).

Importa, neste fase do artigo, demonstrar a importante relação existente entre a distribuição

generalizada de Pareto (GPD), quando usada para modelar as excedências sobre um caudal limiar (POT) e a distribuição GEV, como resultante do modelo de distribuição anual com mesmo valor do parâmetro de forma k da GPD.

Suponha-se que uma GPD descreve a distribuição $G(x)$ da magnitude de eventos superiores a um dado valor limite x_0 , tal que:

$$G(x) = 1 - \left[1 - k \frac{(x-x_0)}{\alpha}\right]^{1/k} \quad (\text{para } k \neq 0) \quad (6)$$

Para $k > 0$, a distribuição anterior é limitada superiormente por: $x_{\max} = x_0 + \alpha/k$; para $k < 0$ a distribuição apresenta uma cauda «grossa» não limitada; com $k = 0$ obtém-se uma distribuição exponencial de dois parâmetros.

Admite-se que as séries de duração parcial são supostas realizações de um processo marcado de Poisson, com taxa ou intensidade média λ (número médio anual de eventos), com distribuição de probabilidade denotada por $G(x)$, dada pela expressão anterior. Para se obter a distribuição anual $F_a(x)$, a função $G(x)$ deverá ser objecto da seguinte transformação (STEDINGER et al., 1993):

$$F_a(x) = \exp\{-\lambda [1 - G(x)]\} \quad (7)$$

A equação anterior revela a relação existente entre a função cumulativa dos máximos anuais com a taxa de ocorrência da distribuição dos valores máximos de duração parcial, isto é, existe uma relação entre distribuição generalizada de Pareto (GPD), quando usada para modelar as excedências sobre um caudal limiar (POT) e a distribuição GEV.

Assim, quando se substitui a Equação 6 na anterior, obtém-se a distribuição GEV para séries de máximos anuais superiores a x_0 (se $k \neq 0$):

$$F_a(x) = \exp\left[-\left(1 - k \frac{x-u}{\alpha}\right)^{1/k}\right] \quad (\text{para } k \neq 0) \quad (8)$$

É de notar que, quando $k = 0$, obtém-se a distribuição de Gumbel:

$$F_a(x) = \exp\left[-\left(1 - \frac{x-u}{\alpha}\right)\right] \quad (9)$$

Quando $x \geq x_0$ os parâmetros transformados u e α^* são definidos por:

$$u = x_0 + \frac{\alpha(1 - \lambda^{-k})}{k} \quad (\text{para } k \neq 0) \quad (10)$$

$$u = x_0 + \ln(\lambda) \quad (11)$$

$$\alpha^* = \alpha \lambda^{-k} \quad (12)$$

Se a probabilidade anual de excedência, $1 - F_a(x)$, for representada por $1/T_a$, para um período de retorno anual T_a , e a correspondente probabilidade de excedência $[1 - G(x)]$ para um nível x na série de duração parcial denotado por q_e , então a Equação 7 poder ser escrita na forma:

$$\frac{1}{T_a} = 1 - \exp(-\lambda q_e) = 1 - \exp\left(-\frac{1}{T_p}\right) \quad (13)$$

Em que $T_p = 1/\lambda q_e$ representa a média do período de retorno para o nível x . A equação anterior pode então ser resolvida para T_p , obtendo-se:

$$T_p = -\frac{1}{\ln\left(1 - \frac{1}{T_a}\right)} \quad (14)$$

De notar que T_p será menor que T_a porque mais do que um evento poderá ocorrer por ano numa série de duração parcial. A equação anterior transforma a taxa média de ocorrência λq_e para eventos maiores do que x , em probabilidades anuais de excedência $1/T_a$ nas séries de máximos anuais. Para níveis de x com $T_a > 10$, correspondentes já a eventos de reduzida frequência, a probabilidade de excedência anual $1/T_a$ tenderá para a taxa média de ocorrência: $\lambda q_e = \lambda[1 - G(x)]$ da série de duração parcial, de modo que: $T_a = T_p$ [STEDINGER *et al.*, 1993].

Outras distribuições teóricas têm sido aplicadas por diversos autores em inferência estatística para a estimação de caudais de cheia, tais como as distribuições de Lambda, Wakeby, Kappa, Johnson, etc.

De uma maneira geral, é mais ou menos aceite implicitamente pela comunidade técnico-científica que as quatro famílias enunciadas atrás serão as mais «apropriadas» para a inferência estatística de caudais de ponta de cheia. No entanto, sai fora do

presente artigo aprofundar a discussão e revisão das distribuições estatísticas referidas acima para análise de frequências de cheias, podendo o leitor interessado consultar, por exemplo, os trabalhos de RAO e HAMED [2000] ou KATZ *et al.* [2002].

Após a selecção do(s) modelo(s) a aplicar, o passo seguinte passa pela estimação dos parâmetros das respectivas distribuições a partir da amostra disponível. Os métodos habitualmente utilizados (RODRIGUES, 1990) são o:

- Método dos mínimos quadrados.
- Método dos momentos.
- Método da máxima verossimilhança.
- Método dos quantis.
- Método da máxima entropia.

A escolha do método, ou dos métodos mais adequados, listados acima, depende do tipo de distribuição teórica adoptada, sendo que em algumas famílias de distribuições não existem um, ou mais, dos métodos enunciados.

O passo seguinte consiste no ajustamento dos dados observados às distribuições teóricas seleccionadas, verificando a qualidade do seu ajustamento, que pode ser avaliada pelo teste paramétrico estatístico do Qui-Quadrado, ou pelos testes não-paramétricos de Kolgomorov-Smirnov, Filiben, Anderson-Darling, Cramer-Von Mises, etc.

Refira-se que estes testes estatísticos não discriminam entre modelos, servindo apenas para aceitar (ou não) a hipótese nula para um determinado nível de significância (normalmente de 5%), de que a amostra em análise tenha sido extraída de uma população descrita pelo modelo sob premissa.

Os modelos que consigam «passar» pelos testes de hipóteses acima referidos, para os níveis de significância adoptados, são depois normalmente colocados em conjunto com os valores observados, de modo a se efectuar uma inspecção visual e seleccionar então o modelo que melhor se ajusta à série observada.

Finalmente, após a selecção da função de distribuição teórica que melhor se ajusta aos valores observados, podem obter-se as estimativas dos caudais para as probabilidades de excedência (períodos de retorno) pretendidas.

Assim, na maior parte das vezes, a inferência estatística é realizada para um modelo pré-determinado, em função de critérios que podem ir desde a simples opção do executante até à necessidade de se observar um regulamento em vigor.

Como se pode constatar de seguida, existem diversos erros e incertezas associadas à inferência estatística de caudais extremos, pela metodologia referida atrás. YEN [2000] propôs um esquema hierárquico dos tipos de incertezas associadas à

metodologia de avaliação de caudais extremos, que se apresenta na seguinte Tabela 1.

Tabela 1 – Esquema de incertezas hierárquicas (adaptado de YEN, 2002).

Tipo de incerteza	Sensível a
1. Incerteza natural	Condições de não estacionariedade
2. Incerteza do modelo	Escolha do modelo
3. Incerteza dos parâmetros	Técnica de ajustamento; testes de qualidade do ajustamento
4. Incerteza nos dados	Escolha de dados; acuidade dos dados observados
5. Incerteza operacional	Erros humanos; decisões

De uma forma geral, seja qual a for a distribuição teórica adoptada, a informação total sobre caudais de cheia existentes para a secção em análise é várias vezes utilizada na inferência, o que faz com que seja inevitavelmente dominada pela informação disponível para as ocorrências centrais da amostra, sendo frequente observar-se um afastamento importante entre a distribuição empírica dos valores extremos da amostra e a distribuição que àqueles caudais estaria atribuída pelo modelo.

Tal como referido atrás, o planeamento de recursos hídricos dirige-se mais frequentemente para a estimação de caudais de cheia de muito reduzida probabilidade de excedência. No entanto, ainda quando o interesse incida sobre os valores excepcionais de caudais, aquilo que ocorre é trabalhar com a totalidade da amostra disponível para a secção de interesse.

A situação anterior prende-se com duas ordens de razão: razão conceptual, porque se admite que a distribuição é única e por isso toda a informação sobre os valores centrais também é elucidativa sobre o comportamento das caudas das distribuições; a segunda por razões práticas, porque normalmente não se possui senão um número muito reduzido de observações excepcionais fazendo com que a amostra seja muito curta.

Refira-se, contudo, que existem vários autores, nomeadamente SMITH (1989), que descrevem métodos de análise de frequência de caudais de ponta onde empregam apenas as estatísticas de ordem superior, em detrimento e até exclusão das ocorrências centrais da amostra.

O afastamento tantas vezes observado entre a

distribuição empírica dos valores observados das caudas da amostra ordenada e a distribuição estimada pelo modelo é atribuído à aleatoriedade do processo, que teria gerado umas quantas observações excepcionais naquele período curto, ou o inverso, ambas as hipóteses perfeitamente plausíveis e insusceptíveis de comprovação.

Quando o nosso interesse na modelação consiste precisamente na estimação de valores excepcionais, o que presume uma extrapolação importante sobre a dimensão da amostra, este tipo de raciocínio não pode deixar de ser apontado como contraditório. Por exemplo, quando alguns autores (e.g.: HENRIQUES, 1990) apontam para o facto de não se dever extrapolar valores para períodos de retorno 3 a 4 vezes superiores à dimensão da amostra, como é que, na maioria das situações, em que os períodos de registos não têm dimensão superior a 30 anos, se podem extrapolar caudais de cheia para um período de retorno de, por exemplo, 1000 anos?

Acrescente-se ainda o facto de não haver um consenso geral na comunidade técnico-científica de qual a «melhor» função de distribuição a adoptar para a inferência estatística de caudais de ponta de cheia numa determinada linha de água, constatando-se que uma ou outra das funções teóricas referidas atrás se ajustam melhor ou pior, em função dos dados registados para cada caso analisado.

Esta situação prende-se com o facto de, nas ciências hidrológicas, como em outras áreas das ciências naturais, nunca se conhecer a priori a população mas apenas algumas amostras, mais ou menos representativas da mesma. A questão central que assim se poderá colocar será: poderemos alguma vez conhecer a população e, assim, com base na função de distribuição «real» desta, poder estimar com elevada segurança os valores pretendidos? É nesta direcção que o presente artigo pretende dar um pequeno contributo, como se exporá adiante.

Conforme referido atrás, o conhecimento da cauda superior da distribuição de frequências tem um papel fundamental na análise de inferência estatística de valores extremos. Com efeito, desde o trabalho de BRYSON (1974), que se debruçou sobre a questão da modelação das caudas de distribuições estatísticas a partir dos valores extremos observados, em que assinalou que não ser possível usar com eficiência o teste do Qui-Quadrado, por escassez de dados sobre eventos extremos, nem o teste de Kolgomorov-Smirnov, por ser a distribuição empírica dos valores extremos muito próxima de 1 ou 0, não se podendo retirar assim quaisquer conclusões minimamente válidas.

Este autor introduziu ainda o conceito muito importante de função de distribuição com cauda «grossa», sendo

aquela que converge para zero mais lentamente do que uma função exponencial, tendo assinalado que a cauda de várias funções de distribuição se comportam como exponenciais (cauda «fina»), uma vez que a sua componente polinomial se torna então menos importante.

Apresenta-se, resumidamente na Tabela 2, o «peso» da cauda superior de algumas distribuições referidas atrás.

Tabela 2 – Peso das caudas superiores de algumas distribuições comuns (adaptado de HOSKING e WALLIS, 1997).

Forma de f(x) para x elevado	Distribuições
x^{-A}	GEV; GPD, com parâmetro de forma $k < 0$
$x^{-A \log x}$	Log-normal, com assimetria positiva
$\exp(-x^A)$, $0 < A < 1$	Weibull, com parâmetro $\lambda < 1$
$x^A e^{-Bx}$	Pearson Tipo III, com assimetria positiva
$\exp(-x)$	Exponencial ; Gumbel
$\exp(-x^A)$, $A > 1$	Weibull, com parâmetro $\lambda > 1$
Limite superior finito	GEV;GPD, com parâmetro de forma $k > 0$ Log-normal; Pearson tipo III com assimetria negativa

Notas: Os «pesos» das caudas superiores estão ordenados das caudas mais «grossas» para as caudas mais «finas». A e B denotam constantes positivas arbitrárias.

A questão da selecção de funções de distribuição não é trivial em inferência estatística de caudais extremos, dado que se ajustarmos uma distribuição de cauda «grossa» aos dados observados, os valores extrapolados serão superiores aos do ajustamento por uma distribuição do tipo exponencial (cauda «fina»). Será esta a questão central do presente artigo, onde se propõe a introdução de uma função de distribuição do tipo lei de potência (cauda «grossa»), para a estimação de caudais de cheia, conforme se exporá nos capítulos seguintes.

2. A GEOMETRIA FRACTAL APLICADA AO ESTUDO DE FENÓMENOS NATURAIS

2.1. Objectos fractais, auto-semelhança e leis de potência

Antes de se prosseguir, torna-se necessário fazer uma breve apresentação do conceito de objectos fractais, das leis de potência e das suas consequentes aplicações ao estudo de fenómenos naturais, área esta em profundo desenvolvimento nos últimos anos.

O conceito de geometria fractal surgiu com os trabalhos pioneiros do matemático francês (de origem polaca) Benoît Mandelbrot durante a década de 60. Com efeito, no primeiro artigo referente à geometria fractal, MANDELBROT (1967), este autor apresentou os importantes conceitos de dimensão fractal e de auto-semelhança ao estudar o comprimento da linha de costa da Grã-Bretanha.

Resumidamente, a dimensão fractal representa uma dimensão fraccionária, sendo a geometria inerente aos objectos naturais, ao contrário das dimensões inteiras provenientes da geometria clássica, que representam apenas objectos artificiais concebidos pelo Homem. A auto-semelhança deve-se à segunda propriedade extremamente importante dos objectos fractais, ou seja, não mudarem de aspecto com o efeito de escala, apresentando assim a mesma estrutura independentemente da mudança de escala.

Na geometria fractal o comprimento de uma curva suave pode ser medida pela subdivisão da mesma utilizando uma régua de tamanho r . O tamanho da curva será assim aproximadamente $L(r) = Nr$, em que N é o número de intervalos de divisão. Quando a sinuosidade da curva aumenta, será necessário diminuir a dimensão da régua, r , de modo a permitir aumentar a acuidade da medição do comprimento da curva. De facto, à medida que o intervalo r tende para zero, converge-se para o comprimento correcto da curva, de tal modo que:

$$L = \lim_{r \rightarrow 0} L(r) = \lim_{r \rightarrow 0} Nr \quad (15)$$

Foi possível, com base no estudo do comprimento de linhas de costa, demonstrar que:

$$\lim_{r \rightarrow 0} N(r)r^D = cte \quad (16)$$

Em que a notação $N(r)$ foi adoptada para enfatizar a dependência do número de intervalos no tamanho de cada subdivisão. A equação (16) implica que para valor pequenos de r tem-se que:

$$N(r) \propto r^{-D} \quad (17)$$

$$L(r) \propto r^{1-D} \tag{18}$$

Em que D representa, nas expressões anteriores, o expoente crítico ou dimensão fractal. Equivalentemente tem-se, pela definição de dimensão fractal D (MANDELBRÖT, 1991), que:

$$D = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log N(r)}{\log(1/r)} \tag{19}$$

Implícito à definição dada no início do capítulo, um fractal é assim um conjunto (objecto, construção geométrica, etc.) cujas partes são de alguma forma congruentes com elas próprias sob determinadas transformações de afinidade. Estas transformações são definidas como operações geométricas sob as quais o conjunto é transformado numa cópia de si mesmo, eventualmente por operações de translação, rotação ou ampliação. Assim, escolhendo um ponto arbitrário de coordenadas vectoriais x pertencentes ao conjunto, um ponto de afinidade y define-se pela seguinte relação matricial (RODRÍGUEZ-ITURBE e RINALDO, 2001):

$$y = A(\lambda, \theta) + T \tag{20}$$

A matriz A representa a ampliação do parâmetro λ e a rotação do parâmetro θ ; T é um operador de translação. É de notar que são as propriedades do parâmetro λ que identificam o comprimento característico da transformação.

Em particular, seja um conjunto fractal identificado por uma propriedade média, digamos S, de um subconjunto G' de um conjunto total, designado de G. É possível determinar as propriedades médias de qualquer subconjunto relativamente ao seu todo. Assim, uma propriedade importante de um objecto fractal G é a validade de uma relação funcional que relacione a sua propriedade média S do tipo (RODRÍGUEZ-ITURBE e RINALDO, 2001):

$$S(G) = f(\lambda) S(\lambda G') \quad \forall G' \subset G \tag{21}$$

Sendo f uma função apropriada. Note-se assim que, se a propriedade média S é dependente de apenas uma variável, digamos q, descrevendo o conjunto (e.g. volume, área, etc.), então temos que $S(G) = S(q(G))$; assim pela validade da expressão anterior, requer que a função S(q) seja uma lei de potência, ou seja:

$$S(q) = cq^\alpha \tag{22}$$

Em que c e α são coeficientes apropriados. Designa-se, para estes casos, que o conjunto S é de escala e que a sua propriedade obedece a uma lei de potência, implicando a sua propriedade fractal intrínseca de auto-semelhança, isto é, invariância à mudança de escala. Assim, uma expressão do tipo (22) possui invariância de escala (auto-semelhança), dado que quando q é escalado pela multiplicação por uma constante, S(q) continua a ser proporcional a q^α .

É de referir que as leis de potência poderão ter, ou não, natureza estatística, mas em muitos casos reflectem fenómenos de auto-semelhança (RODRÍGUEZ-ITURBE e RINALDO, 2001).

2.2. Funções de distribuição Levy-estáveis

Tal como referido atrás, as leis de potência do tipo da expressão (22) apresentam cauda «grossa» e fazem parte de um caso especial da família de funções de distribuição designadas por Levy-estáveis, cujas principais propriedades que apresentam são precisamente as referidas caudas «grossas» e a assimetria, pertencendo assim a uma família diferente das distribuições normais (de Gauss).

As distribuições de Lévy-estáveis foram introduzidas pelo matemático francês Paul Lévy (LÉVY, 1925), aquando da sua investigação sobre o comportamento da soma de variáveis aleatórias independentes. A ausência de formas fechadas para as funções de densidade de probabilidade, excepto para três casos particulares de distribuições: Gauss, Cauchy e Lévy levou a que a sua utilização prática tenha sido pouco frequente pela comunidade técnica.

Uma distribuição de Lévy-estável necessita de quatro parâmetros para a descrever: um índice de estabilidade (índice de cauda, expoente de cauda ou expoente característico) $\alpha \in [0, 2]$, um parâmetro de assimetria $\beta \in [-1, 1]$, um parâmetro de escala $\sigma > 0$ e um parâmetro de localização $\mu \in \mathfrak{R}$.

O expoente de cauda, α , é o parâmetro mais importante, dado que determina a forma (taxa de variação) da cauda da distribuição. Assim, para o caso particular de $\alpha = 2$ obtém-se a distribuição de Gauss e quando $\alpha < 2$ a variância é infinita. Quando $\alpha > 1$ a média da distribuição existe e será igual a μ (MEERSCHAERT e SCHEFFLER, 2003).

Em geral, o momento de ordem p de uma distribuição de Levy-estável é finito se $p < \alpha$. Quando o parâmetro de assimetria β é positivo, a distribuição será assimétrica para a direita, e para a esquerda em caso contrário. Quando $\beta = 0$, a distribuição é simétrica relativamente a μ . Assim, quando α se aproxima de 2, o parâmetro β perde o seu efeito e a distribuição aproxima-se de uma de Gauss (excepto em β). Os últimos dois parâmetros

μ e σ determinam a largura e o pico (moda) da distribuição, respectivamente.

Devido à ausência de fórmulas fechadas das funções de densidade de probabilidade, as distribuições de Lévy-estáveis são mais convenientemente descritas através da sua função característica $\phi(t)$, que representa a inversa da transformada de Fourier da função de densidade de probabilidade.

A parametrização mais popular da função característica $\phi(t)$ de uma distribuição de Lévy-estável $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ é dada pela seguinte expressão (WERON, 2001):

$$\log \phi(t) = \begin{cases} -\sigma |t|^\alpha \left\{ 1 - i\beta \operatorname{sign}(t) \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2} \left[(\sigma |t|^{1-\alpha} - 1) \right] \right\} + i\mu_0 t, & \alpha \neq 1 \\ -\sigma |t| \left\{ 1 + i\beta \operatorname{sign}(t) \frac{\pi}{2} \log(\sigma |t|) \right\} + i\mu_0 t, & \alpha = 1 \end{cases} \quad (23)$$

Lévy demonstrou ainda que quando $\alpha < 2$, a cauda das distribuições de Lévy-estáveis são assintoticamente equivalentes a uma lei de Pareto (LÉVY, 1925). Nomeadamente, se $X \sim S_{\alpha < 2}(\sigma, \beta, 0)$, então, quando $x \rightarrow \infty$, tem-se que:

$$\begin{aligned} P(X > x) = 1 - F(x) &\rightarrow C_\alpha (1 + \beta) x^{-\alpha} \\ P(X < x) = F(-x) &\rightarrow C_\alpha (1 - \beta) x^{-\alpha} \end{aligned} \quad (24)$$

Em que:

$$C_\alpha = \left(2 \int_0^\infty x^{-\alpha} \sin x \, dx \right)^{-1} = \frac{1}{\pi} \Gamma(\alpha) \sin \frac{\pi\alpha}{2} \quad (25)$$

A convergência da cauda de uma lei de potência varia assim para diferentes valores de α e decairá para zero tão mais devagar quanto menor for o índice de cauda, ou seja, quanto menor for o valor de α , mais «grossa» será a cauda da distribuição, tal como se apresenta na seguinte figura.

Face ao acima exposto, pode dizer-se que uma variável aleatória X segue uma distribuição de cauda «grossa» (lei de potência), com índice de cauda α , se: em que C é uma constante positiva. A expressão

$$P[X \geq x] \sim Cx^{-\alpha}, \text{ quando } x \rightarrow \infty, 0 < \alpha < 2 \quad (26)$$

anterior é um caso particular das distribuições de Lévy-estáveis ($\beta = 0$), pelo que a variância é infinita e, se $\alpha \leq 1$, a média é também infinita (CROVELA e TAQUU, 1998).

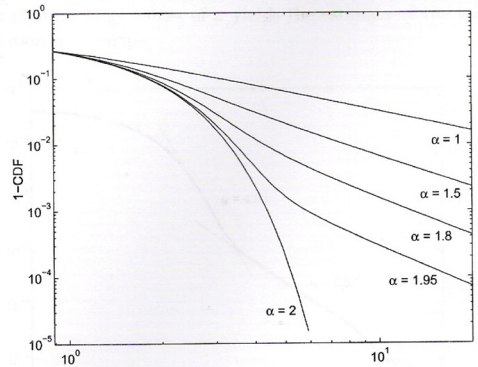


Figura 1 – Plotagem, em escala logarítmica, das caudas direitas de funções de distribuição Lévy-estáveis para valores de $\alpha = 2.0, 1.95, 1.8, 1.5$ e 1.0 . Pode verificar-se que, quanto menor for o valor de α , menos forte é o decaimento da cauda.

2.3. Estimação do índice de cauda das leis de potência

O método mais simples e eficaz de estimar o parâmetro α é a examinação dos dados directamente, através da plotagem da função de distribuição complementar $\bar{F}(x) = 1 - F(x) = P[X > x]$, num gráfico de eixos logarítmicos. Desta forma, as leis de potência apresentam a seguinte propriedade importante (NOLAN, 2005):

$$\frac{d \log \bar{F}(x)}{d \log x} \sim -\alpha \quad (27)$$

para valores elevados de x . O comportamento linear num gráfico da cauda de uma lei de potência é evidente apenas por observação visual. Caso exista essa evidência, pode estimar-se o valor de α por observação no gráfico seleccionando um valor mínimo x_0 de x acima do qual o gráfico pareça ser linear. O valor estimado de α é assim o declive da recta obtida graficamente.

Em alternativa, poder-se-á aplicar o estimador de Hill (HILL, 1975), que permite a estimação de α em função dos k maiores elementos da série, definido por:

$$H_{k,n} = \left(\frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} (\log X_{(n-i)} - \log X_{(n-k)}) \right)^{-1} \quad (28)$$

onde $X_{(1)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ denotam as estatísticas de ordem, isto é, os índices de dados ordenados de acordo com o seu tamanho. Na prática, o estimador de Hill é plotado em relação a valores crescentes de k , quando o estimador estabiliza para um valor consistente então obtém-se uma estimativa de α .

Uma alternativa mais fácil de aplicar será uma fórmula equivalente ao estimador de Hill acima apresentado, sendo obtido pelo método da máxima verossimilhança. Deste modo, pode demonstrar-se que o estimador de α pode ser calculado pela seguinte fórmula (CLAUSET et al. 2009):

$$\hat{\alpha} = 1 + n \left[\sum_{i=1}^n \ln \frac{x_i}{x_{\min}} \right]^{-1} \quad (29)$$

Em que x_i , $i = 1 \dots n$ são os valores observados de x tal que $x_i \geq x_{\min}$.

2.4. Aplicação de leis de potência ao estudo de fenómenos naturais

Veremos de seguida que nos últimos anos, vários investigadores detectaram que as relações do tipo lei de potência surgem abundantemente para explicar fenómenos naturais em geral e, em particular, na hidrologia e na geomorfologia de bacias hidrográficas (RODRÍGUEZ-ITURBE e RINALDO, 2001).

De facto, segundo estes últimos autores, a topologia das bacias hidrográficas, bem como a geometria hidráulica da rede de drenagem e a própria resposta hidráulica das bacias a diferentes tipos de precipitação são bem caracterizadas por leis de potência entre as variáveis envolvidas na sua descrição.

A lei de potência, talvez mais conhecida, é a designada distribuição de Richter-Guttenberg, da distribuição da frequência da magnitude de sismos por ano que ocorrem no sul da Califórnia (TURCOTTE, 1992, HOOGE et al., 1994, LOVEJOY, 2003), que é dada por uma função de distribuição do tipo:

$$P[X \geq x] \propto x^{-\alpha} \quad (30)$$

Repare-se na semelhança entre a expressão anterior e a Equação (26).

MANDELBROT (1974) demonstrou que o *input* de energia uniforme em sistemas dissipativos frequentemente resulta numa distribuição espacial do tipo lei de potência, para a energia guardada e uma consequente dissipação fractal da mesma. Dá-se a este fenómeno o termo de «relaxamento» e, de acordo com PETERS e CHRISTENSEN (2002), a precipitação poderá ser também um fenómeno de «relaxação» de energia que obedecerá a uma lei semelhante à de Richter-Guttenberg para os sismos, de acordo com a expressão (30), sendo estes últimos também fenómenos de «relaxamento» de energia.

De facto, a interpretação fractal da precipitação foi já uma ideia amplamente desenvolvida por diversos

autores, nomeadamente BENDJOURI et al. (1997), HUBERT et al. (2000 e 2002) que relacionaram as curvas de intensidade-duração-frequência (IDF) com invariâncias de escala (objectos fractais), sendo também bem explicadas por leis do tipo potência.

Assim, dado a precipitação parecer ser um fenómeno de «relaxamento» de energia e, conseqüentemente, obedecer a leis de potência, é natural conjecturar que o escoamento (energia dissipada) em bacias hidrográficas - à parte de todas as transformações complexas ocorridas entre precipitação/escoamento - possa obedecer também a leis de potência nas suas variações espaciais do tipo da expressão (30).

Com efeito, foi com base neste pressuposto que TURCOTTE (1992) analisou os objectos fractais e sua aplicação ao estudo de fenómenos geológicos e geofísicos. Mais tarde, TURCOTTE e GREEN (1993) estudaram a eventual possibilidade de invariantes de escala na análise de frequência de cheias e, conseqüentemente, TURCOTTE (1994) aplicou leis de potência para a estimação de caudais de cheias.

MALAMUD e TURCOTTE (1996) estudaram a grande cheia do rio Mississippi, ocorrida em 1993, com base numa comparação da aplicação da distribuição de log-Pearson III (Equação 2) com uma função de distribuição do tipo lei de potência. Assim, comparando registos geológicos de paleocheias do Mississippi puderam aferir que a lei de potência se ajustava mais correctamente na cauda da distribuição aos valores históricos observados face à primeira distribuição.

Mais recentemente, KISDSON e RICHARDS (2005) fizeram uma síntese dos principais modelos para estimação de caudais de ponta de cheia, onde referem a viabilidade da aplicação de leis de potência.

Finalmente, MALAMUD e TURCOTTE (2006) estudaram novamente a aplicabilidade da utilização de leis de potência na análise de frequências de cheias em alguns rios dos Estados Unidos.

O presente artigo segue a linha de raciocínio dos autores referidos, tendo-se analisado, para alguns rios portugueses, a aplicabilidade das leis de potência para a avaliação de caudais de cheia. A metodologia adoptada será explanada no capítulo seguinte.

3. METODOLOGIA PROPOSTA E RESULTADOS OBTIDOS

3.1. Séries de caudais de ponta de cheia anuais e de duração parcial

Uma série temporal de registos de caudais de um rio exhibe normalmente uma componente cíclica anual. Daí ser procedimento normal em estudos hidrológicos ter-se em atenção o uso do designado «ano hidrológico»

que, em Portugal, é definido como um período de 12 meses, começando no primeiro dia de Outubro de cada ano e terminando a 30 de Setembro do próximo.

Uma cheia anual corresponde à descarga máxima (de pico) registada de todos os valores de um ano hidrológico. Normalmente, na inferência estatística de caudais de ponta cheia toma-se em consideração apenas o máximo de cada ano hidrológico, em que se garante à partida que os valores da amostra aleatória seleccionada serão independentes e identicamente distribuídos (i.i.d.).

Contudo, a questão da hipótese das cheias máximas anuais serem identicamente distribuídas poderá não estar totalmente garantida, caso exista mais do que um mecanismo causador da inundação no rio (e.g.: precipitação e degelo). Existem abordagens que modelam as vazões máximas por misturas de distribuições: uma para a cauda inferior e outra para a superior, como a TCEV (ROSSI et al., 1984), pressupondo serem oriundas de diferentes mecanismos geradores de enchentes.

No presente artigo admite-se, por simplificação e por que se julga não comprometer os resultados obtidos, que existe apenas um mecanismo gerador de cheias, que serão as precipitações intensas ocorrentes nas bacias hidrográficas, independentemente do mecanismo meteorológico gerador das mesmas (e.g.: tempestades provenientes de superfícies frontais, convectivas, etc.). Sendo assim, admite-se que todas as cheias ocorridas nos rios analisados no presente artigo sejam identicamente distribuídas.

Um dos problemas da análise de cheias é que podem ocorrer várias cheias num ano hidrológico e que poderão ser maiores que as de outro ano hidrológico, não se tomando, portanto, em consideração, estes valores intermédios que poderão ter influência na inferência estatística a realizar.

Uma forma de se colmatar esta dificuldade é a de se considerar séries de caudais de ponta de cheia de duração parcial, entrando-se assim em linha de conta com as várias cheias que poderão ocorrer ao longo de um ano hidrológico.

No presente artigo adoptaram-se séries de cheias de duração parcial, em que os valores seleccionados se encontram separados por um determinado valor de tempo, de forma a evitar que estes valores estejam correlacionados, ou seja, sejam consideradas «cheias independentes». Não há, contudo um consenso geral na escolha deste intervalo mínimo de tempo, sendo que o objectivo é determinar um intervalo mínimo que seleccione apenas «cheias independentes».

Para grande parte dos sistemas fluviais, pequenas bacias de drenagem geralmente correspondem a um menor tempo entre «cheias independentes». De acordo com MALAMUD e TURCOTTE (1999), para um intervalo

de separação de 30 dias a estimação de frequência de cheias é já relativamente robusta. De acordo ainda com estes autores, as séries de duração parcial não são totalmente não correlacionadas, contudo são suficientemente independentes para o objectivo em questão.

De notar que existem outras definições para séries de cheias de duração parcial, nomeadamente HIPEL (1994) que definiu séries de caudais de duração parcial baseadas no critério que o caudal deve baixar, digamos de 50% da cheia de caudal Q , antes que outra cheia seja seleccionada. Outra aproximação é usar os valores máximos acima de um determinado valor limite (POT), tipicamente de 1 a 5 picos por ano hidrológico. De acordo novamente com MALAMUD e TURCOTTE (2006), as diferenças de resultados entre os métodos POT e da separação das cheias parciais por 30 dias é mínima.

O presente artigo segue a linha de pensamento destes últimos autores, pelo que se adoptaram séries de caudais de duração parcial separadas por um intervalo mínimo de 30 dias.

De modo a construir séries de durações parciais de caudais de cheia para cada rio analisado, começou-se por obter dados de séries históricas de caudais médios diários, para cada série hidrométrica seleccionada.

Para cada série, seleccionou-se o caudal Q_1 , correspondente ao máximo valor de caudal médio diário (cheia) desse período, eliminando-se os restantes valores registados dentro do intervalo de 30 dias (anteriores e posteriores) relativamente ao valor Q_1 seleccionado. Este valor Q_1 representará assim a maior cheia registada durante esse período considerado.

De seguida, encontra-se o valor Q_2 , correspondente ao máximo valor de caudal médio diário, para os restantes valores da série, eliminando-se novamente os 30 dias de intervalo relativamente ao valor Q_2 . Este procedimento dá-nos o segundo maior valor de cheia ocorrida durante o período considerado.

O processo continua até se obterem as N maiores cheias para o período em causa, em que N_{AH} representa o número de anos hidrológicos da série histórica seleccionada. Assim, a série de duração parcial de caudais de cheia será constituída pelos maiores valores Q_i de todos os N_{AH} da série histórica.

Os N valores Q_i de caudal seleccionados, associados a cada cheia parcial i , são ordenados de forma descendente ($i = 1, 2, 3, \dots, N$).

Des seguida, calcula-se o período de retorno, T , associado a cada caudal de cheia Q_i seleccionado. Assim, para o cálculo da probabilidade de excedência, como não se conhece *a priori* a função de distribuição, torna-se necessário recorrer a fórmulas de distribuições empíricas da amostra o menos enviesadas possíveis. Existem várias fórmulas empíricas, umas melhores

que outras, em função do tipo de função de distribuição teórica que se pretende ajustar (CHOW, 1988). No presente artigo aplicou-se a fórmula de CUNNANE, que é uma fórmula que dá valores praticamente não enviesados (STEDINGER et al., 1993), sendo dada por:

$$P(X \geq x_i) = \frac{i - 0.40}{N + 0.20} \quad (31)$$

Com base na metodologia e expressão anterior foi possível construir a função de distribuição (cumulativa) empírica associada a cada estação hidrométrica analisada e o período de retorno, T_r , associado a cada caudal Q_i estimado por:

$$T_r = \frac{1}{P(X < x_i)} = \frac{N + 0.20}{i - 0.40} \quad (32)$$

Refere-se que o conceito de tempo de retorno referido atrás, corresponde ao inverso da probabilidade de excedência anual.

Dentro do contexto de séries de duração parcial, que o presente artigo se encontra a analisar, tornou-se necessário então relacionar o tempo de retorno anual (T_a) com o tempo de retorno associado a séries de duração parcial (T_p), aplicando a transformação apresentada na Equação 7 às séries de duração parcial seleccionadas:

$$\lambda = \frac{N}{N_{AH}} \quad (33)$$

3.2. A distribuição de frequências de cheias por leis de potência

A descarga $q(t)$ numa determinada secção de um rio é geralmente uma série temporal contínua. Estando-se interessado em estimar os valores extremos desta série e definir $Q(T)$ como o máximo de caudal associado a um determinado período de retorno, T . Define-se assim que, por exemplo, $Q(100)$ será o máximo caudal (de cheia) que tem um período médio de retorno de 100 anos, ou seja, pela definição atrás referida, haverá 1% de hipótese de se igualar ou exceder aquele caudal $Q(100)$.

Face ao exposto, a inversa da função acumulada de caudais de ponta de cheia terá a seguinte forma geral (cf. Equação 26):

$$Q(T) = CT^\alpha \quad (34)$$

Em que C e α são os coeficientes estimados pela metodologia exposta no Ponto 2.3, sendo o coeficiente C

obtido pela ordenada na origem do gráfico logarítmico (ver figuras seguintes) e o coeficiente α estimado com base na Equação 29.

A variável T , na equação anterior, corresponde ao período de retorno T_p associado às séries de duração parcial, tendo sido estimado pela metodologia exposta no ponto anterior.

A equação anterior também se pode escrever da seguinte forma:

$$N \sim Q^{-\frac{1}{\alpha}} \sim Q^{a\alpha} \quad (35)$$

Esta forma é assim muito similar à Lei de Richter-Gutenberg para a distribuição de frequência de magnitude de sismos e é o inverso de uma lei de potência entre a função de distribuição (cumulativa) e a magnitude dos eventos considerados.

Conforme a metodologia atrás exposta, aplicando logaritmos em ambos os lados da Equação 34, obtém-se a seguinte equação de recta:

$$\log Q(T) = \alpha \log T + \log C \quad (36)$$

Em que o parâmetro α é o declive da recta de $\log(Q)$ versus $\log(T)$ num gráfico logarítmico, sendo $\log(C)$ a ordenada correspondente ao tempo de retorno $T = 1$.

Uma formulação alternativa à equação anterior introduz um factor F de frequência de cheias, definido como o rácio entre o caudal de ponta para um período de retorno de 10 anos sobre um caudal com um 1 ano de período de retorno. Devido à invariância de escala (auto-semelhança) das leis de potência (cf. Capítulo 2), o factor F também é o rácio de um caudal de ponta de 100 anos de período de retorno para o de 10 anos, tal que:

$$F = \frac{Q(10)}{Q(1)} = \frac{Q(100)}{Q(10)} = cte. \quad (37)$$

Os parâmetros F e α estão relacionados pela substituição da Expressão 34 na equação anterior, obtendo-se:

$$F = 10^\alpha \quad (38)$$

Se o factor F de frequência de cheias é elevado, o rácio entre as cheias de 10 e 1 anos é também elevado, e, inversamente, se F for reduzido também será o rácio. Este factor F estará directamente relacionado com o tipo de clima: para climas marítimos F será relativamente reduzido e para climas áridos ou semi-áridos o factor F será relativamente alto (TURCOTTE, 1994).

3.3. Análise de dados

De forma a ilustrar a utilização de leis de potência na estimação de frequência de caudais de ponta de cheia, aplicou-se a metodologia a 5 estações hidrométricas de Portugal Continental, cujos dados (caudais médios diários) foram descarregados directamente do SNIRH (2007).

Na selecção das estações hidrométricas procurou-se abranger o máximo possível a grandezas de áreas de drenagem, que vão desde 140 km² até mais 91 000 km², com períodos de registos relativamente longos.

Na Tabela 3 apresentam-se as principais características das estações seleccionadas.

3.4. Resultados obtidos

Com base na metodologia exposta nos pontos anteriores e nas séries históricas seleccionadas estimaram-se os valores obtidos para cada linha de água estudada.

Os gráficos logarítmicos log T – log Q, para cada estação hidrométrica analisada, apresentam-se nas figuras seguintes e o resumo dos resultados obtidos apresentam-se na Tabela 4.

Obtiveram-se assim as seguintes equações de ajustamento a leis de potência dos caudais de ponta de cheia nas secções das linhas de água estudadas:

Rib.^a Avis (Monforte):

$$Q = 13.16.T^{0.50} \quad (39)$$

Rib.^a Tera (Pavia):

$$Q = 36.48.T^{0.48} \quad (40)$$

Rio Sorraia (Ponte Coruche):

$$Q = 51.95.T^{0.62} \quad (41)$$

Rio Tejo (Vila Velha Ródão):

$$Q = 458.04.T^{0.73} \quad (42)$$

Rio Douro (Régua):

$$Q = 856.05.T^{0.70} \quad (43)$$

Pela observação dos valores da Tabela 4, constata-se haver uma variabilidade razoável entre as linhas de água estudadas quer no parâmetro α como no factor F.

O expoente da lei de potência, α , estimado para cada linha de água estudada varia sensivelmente entre 0.48 e 0.73.

Esta variabilidade poderá dever-se a factores fisiográficos (área, forma da bacia, rede de drenagem, etc.), bem como aos factores climáticos associadas a cada bacia hidrográfica. Pela observação da Tabela 4 parece observar-se um aumento do coeficiente α directamente proporcional à área da bacia de drenagem; no entanto, a

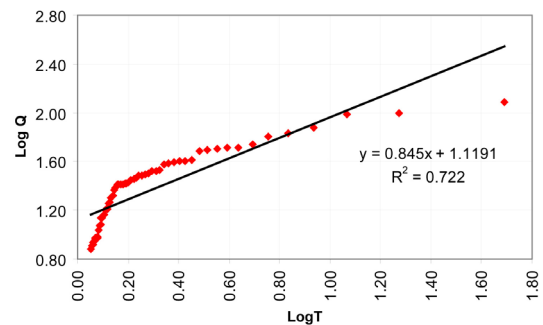


Figura 2 – Relação dos caudais de ponta de cheia observados Q_p , associados ao períodos de retorno estimados T_p , para a estação hidrométrica de Monforte (Ribeira de Avis).

Tabela 3 – Características das 5 estações hidrométricas seleccionadas (fonte: SNIRH, 2007).

Nome	Código	Latitude	Longitude	Rio	Bacia Hidrográfica	Área drenada (km ²)	Período de registos disponíveis	Nº anos hidrológicos, N_{AH}
Monforte	19M/01H	39°03'9"N	7°26'46"W	Rib. ^a Avis	Rio Tejo	141	1961/62 - 1989/90	29
Pavia	20I/04H	38°53'45"N	8°00'10"W	Rib. ^a Tera	Rio Tejo	616	1958/59 - 1991/92	34
Ponte Coruche	20F/02H	38°51'21"N	8°32'44"W	Rio Sorraia	Rio Tejo	5 847	1912/13 - 1979/80	68
Vila Velha Ródão	16K/01H	39°39'48"N	7°40'40"W	Rio Tejo	Rio Tejo	59 247	1903/04 - 1973/74	71
Régua	07K/01H	41°09'4"N	7°46'55"W	Rio Douro	Rio Douro	91 506	1939/40 - 1966/67	28

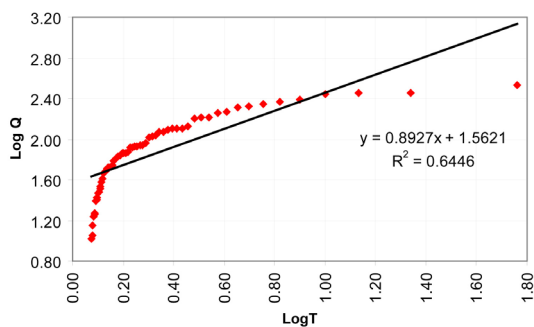


Figura 3 – Relação dos caudais de ponta de cheia observados Q_p , associados ao períodos de retorno estimados T_p , para a estação hidrométrica de Pavia (Ribeira de Tera).

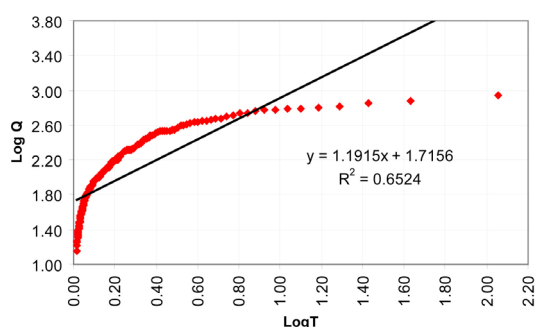


Figura 4 – Relação dos caudais de ponta de cheia observados Q_p , associados ao períodos de retorno estimados T_p , para a estação hidrométrica de Ponte Coruche (Rio Sorraia).

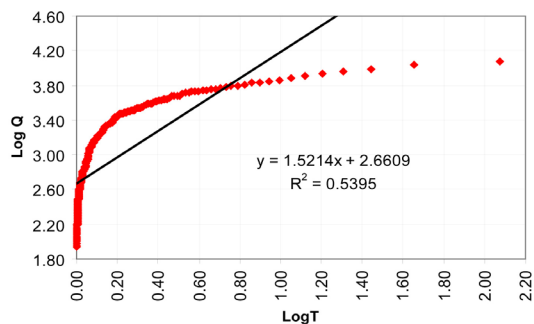


Figura 5 – Relação dos caudais de ponta de cheia observados Q_p , associados ao períodos de retorno estimados T_p , para a estação hidrométrica de Vila Velha de Ródão (Rio Tejo).

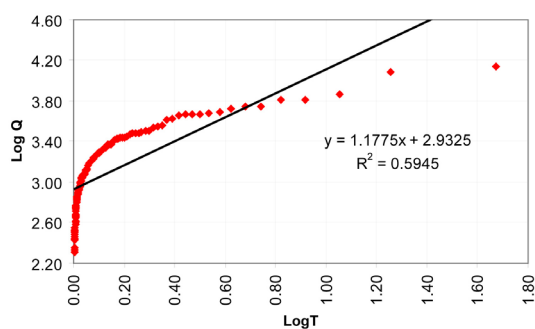


Figura 6 – Dependência Relação dos caudais de ponta de cheia observados Q_p , associados ao períodos de retorno estimados T_p , para a estação hidrométrica de Régua (Rio Douro).

Tabela 4 – Parâmetros obtidos da metodologia exposta para as 5 estações hidrométricas seleccionadas.

Nome	Código	Rio	Nº de caudais "máximos", seleccionados, N	Intensidade média cheias, λ	Expoente da lei de potência, α	Parâmetro da lei de potência, C	Factor de frequência de cheias, F	$q_0 = -1/\alpha$
Monforte	19M/01H	Rib.ª Avis	64	64/29 = 2.21	0.50	13.16	3.31	-1.92
Pavia	20I/04H	Rib.ª Tera	63	63/34 = 1.85	0.48	36.48	2.99	-2.10
Ponte Coruche	20F/02H	Rio Sorraia	221	221/68 = 3.25	0.62	51.95	4.15	-1.62
Vila Velha Ródão	16K/01H	Rio Tejo	393	393/71 = 5.53	0.73	458.04	5.42	-1.36
Régua	07K/01H	Rio Douro	132	132/28 = 4.71	0.70	856.05	5.01	-1.43

análise da variação da dependência do factor α em função dos factores geomorfoclimáticos requer uma investigação mais aprofundada, extravazando o âmbito do presente artigo.

Com a finalidade de comparar as leis de potência obtidas com a função de distribuição de Pareto utilizada em séries de duração parcial (cf. Cap. 1), apresentam-se nas figuras seguintes os ajustamentos das séries de duração parcial (valores observados) às Leis de Pareto e de Potência obtidas nas equações anteriores.

Pela observação dos gráficos anteriores pode constatar-se que as leis de potência se ajustam relativamente bem aos valores observados apenas para períodos de retorno elevados (na cauda direita das funções), sendo que se obtêm maiores valores de caudais de ponta de cheia para

períodos de retorno elevados, em comparação com o ajustamento pela Lei de Pareto, nos casos das estações hidrométricas de Régua, Vila Velha de Ródão e Monforte.

Por outro lado, para as frequências elevadas (períodos de retorno muito reduzidos) a Lei de Pareto ajusta-se bastante melhor aos valores observados, sendo que a Lei de Potência não se ajusta aos valores observados.

Assim sendo, as equações apresentadas de (39) a (43), só terão validade para períodos de retorno $T \geq 10-20$ anos, podendo ser adequadas para estimar caudais de cheia para frequências muito reduzidas e, conseqüentemente, poderem também ser úteis em estudos e projectos de engenharia hidráulica (cf. Cap. 1).

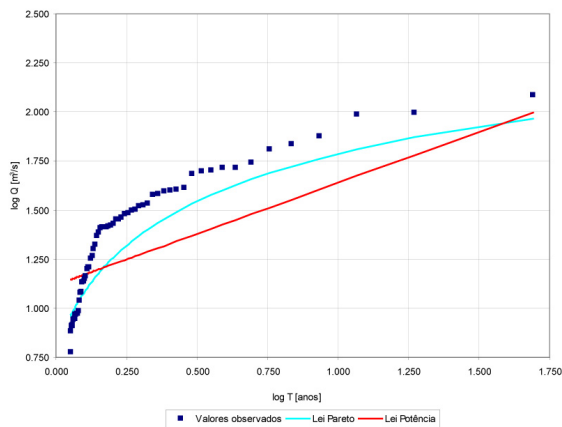


Figura 7 – Ajustamento dos valores observados de caudal de ponta de cheia Q , associados ao período de retorno T , para a estação hidrométrica de Monforte (Rib.^a Avis).

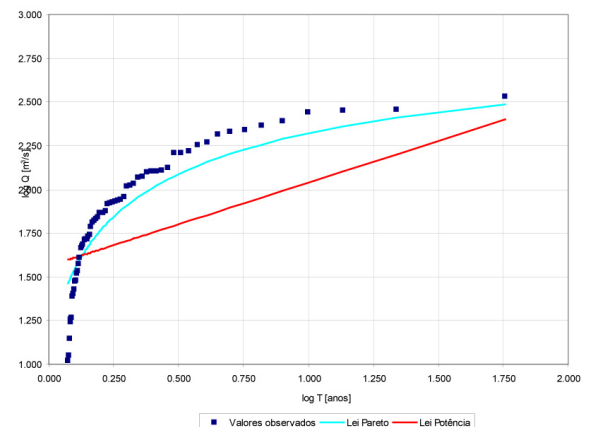


Figura 8 – Ajustamento dos valores observados de caudal de ponta de cheia Q , associados ao período de retorno T , para a estação hidrométrica de Pavia (Rib.^a Tera).

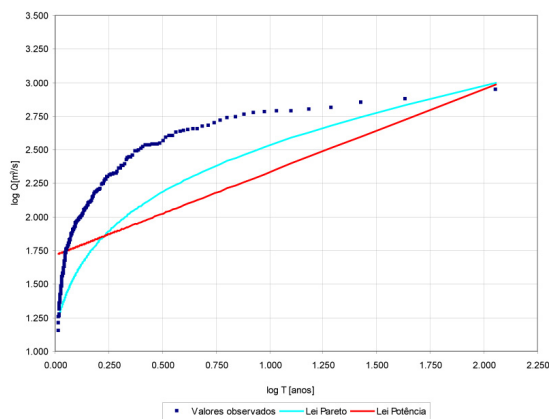


Figura 9 – Ajustamento dos valores observados de caudal de ponta de cheia Q , associados ao período de retorno T , para a estação hidrométrica de Ponte Coruche (Rio Sorraia).

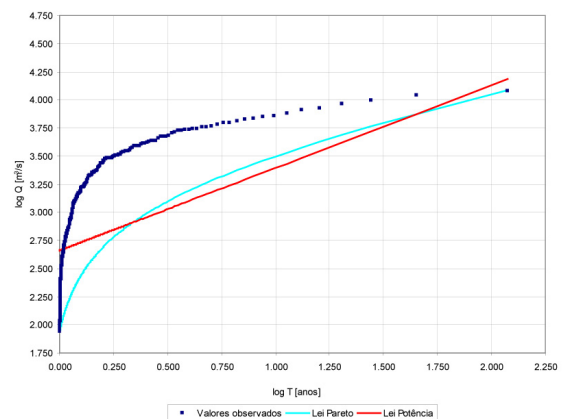


Figura 10 – Ajustamento dos valores observados de caudal de ponta de cheia Q , associados ao período de retorno T , para a estação hidrométrica de Vila Velha de Ródão (Rio Tejo).

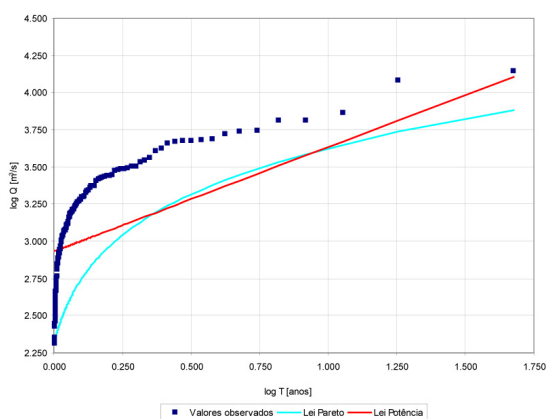


Figura 11 – Ajustamento dos valores observados de caudal de ponta de cheia Q , associados ao período de retorno T , para a estação hidrométrica de Régua (Rio Douro).

4. DISCUSSÃO

Embora o presente artigo discuta a favor da aplicação de distribuições de leis de potência na avaliação de caudais de cheia, deve ser realçado que a sua aplicabilidade é, na melhor das hipóteses, uma aproximação. Com efeito, a maior incerteza é a própria variabilidade climática, quer de origem natural e/ou de origem antropogénica.

Sendo assim, é discutível afirmar que a inferência estatística de caudais de cheia através de leis de potência é preferível a outras distribuições estatísticas «clássicas». No entanto, as leis de potência são, tal como se verificou no capítulo anterior, uma aproximação mais conservadora. De facto, a cauda «grossa» das leis de potência providenciará, de uma forma consistente, maiores valores estimados de caudais de cheia para frequências muito reduzidas, relativamente aos valores estimados usando distribuições de cauda «fina».

É actualmente já reconhecido pela comunidade técnico-científica que as cheias centenárias parecem ocorrer mais frequentemente que o estimado por análises de frequências de cheias do tipo *standard*. Estas grandes cheias são normalmente atribuídas ao fenómeno das «Alterações Climáticas», concomitantemente com outros efeitos de origem antropogénica, tais como: impermeabilização de bacias, canalização de linhas de água, desflorestação de bacias hidrográficas, etc..

Sendo assim, poder-se-ia aplicar qualquer distribuição estatística que tivesse um comportamento assintótico similar às leis de potência (tal como a GPD ou a GEV, com parâmetro de forma $k < 0$). Mas, dado que se podem obter resultados semelhantes (e eventualmente até mais conservadores) em relação

a essas distribuições, no extremo da cauda direita, utilizando uma lei de potência de 2 parâmetros, julga-se que poderá não haver razões para seleccionar distribuições que introduzem mais parâmetros e, como consequência, maior complexidade à análise.

Refira-se ainda que muitos estudos de análise de frequência de distribuições de caudais de cheia têm sido de natureza estritamente estatística. Uma panóplia de distribuições estatísticas têm sido utilizadas sem, no entanto, terem uma justificação física consistente por trás.

A questão importante é saber se existe, de facto, uma base física para a aplicação de leis de potência à análise de distribuições de caudais de cheia. O presente artigo apresentou nos primeiros capítulos as bases teóricas que poderão estar inerentes ao fenómeno natural de cheias, bem como se referiu a aplicabilidade - com bons resultados - de leis de potência a diversos fenómenos naturais, tais como sismos, deslizamentos de terras, fogos florestais, entre outros.

Com efeito, modelos simples de célula-autómato têm sido propostos como análogos ao observado comportamento de leis de potência associadas aos fenómenos naturais atrás referidos. O comportamento destes modelos pode ser melhor interpretado em termos da designada cascata inversa de auto-similaridade (GABRIELOV et al., 1999; TURCOTTE, 1999; TURCOTTE et al., 1999), que exhibe uma coalescência do tipo lei de potência de aglomerados metaestáveis. O comportamento destas cascatas é mais facilmente explicável em termos de incêndios florestais, quer o modelo, como os fogos reais (TURCOTTE e MALAMUD, 2004). Assim, os aglomerados metaestáveis são as regiões inflamáveis das árvores que começarão a arder assim que o fogo é accionado. Quanto mais árvores crescem, mais os aglomerados se expandem e coalescem. Em média, uma cascata de árvores dos pequenos para os grandes aglomerados são destruídos quando os últimos ardem. Utilizando secções cruzadas para a coalescência de aglomerados é possível mostrar que o número e tamanho dos aglomerados obedecem a uma lei de potência. Assim, a distribuição de frequência de fogos florestais, quer no modelo como os reais, são leis de potência. Os mesmos argumentos são aplicáveis quer a deslizamento de terras, quer a sismos. Para o primeiro, a região metaestável corresponde à área de início de propagação do deslizamento provocado por um tremor de terra. Para o caso dos sismos, a região metaestável corresponde à área de propagação da ruptura assim que iniciada.

Continua por se mostrar se a distribuição de caudais de cheia pode ser atribuída a uma cascata de aglomerados metaestáveis. Contudo, tal como se referiu no presente artigo, a precipitação parece

exibir nitidamente um comportamento estatístico do tipo leis de potência numa variedade de formas. A associação de distribuições de leis de potência de caudais de cheia com distribuições de leis de potência de precipitação mantém-se ainda no campo da especulação. A precipitação está associada a regiões metaestáveis na atmosfera (designadas de células), porém a coalescência destas regiões para formar grandes eventos de precipitação (e consequentes cheias) necessita ainda de ser convincentemente demonstrada.

O presente artigo teve assim por objectivo alertar a comunidade técnico-científica para a aplicabilidade de leis de potência – distribuições de cauda «grossa» – na inferência estatística de caudais de ponta de cheia.

Propôs-se uma metodologia bastante simples, que permite obter valores mais conservadores de caudais de cheia para períodos de retorno elevados, relativamente às designadas distribuições «clássicas» comumente aplicadas em projectos de obras hidráulicas.

Tal como foi referido, a aplicabilidade de leis de potência à distribuição de caudais de cheia é ainda matéria especulativa. De acordo com a diversa investigação realizada nos últimos anos, parece haver um consenso geral de que muitos fenómenos naturais obedecem a leis de potência, pelo que não será de estranhar que eventos extremos de precipitação-caudal possam também obedecer a estas mesmas leis. Além do mais, a aplicação de leis de potência terá assim uma base física explicativa de fundo, em contraste com os métodos tradicionais de inferência, que são puramente estatísticos sem terem, portanto, uma base de suporte física do fenómeno.

A aplicabilidade de leis de potência a caudais de cheia carece ainda de muita pesquisa. Considera-se que uma das vias possíveis de se poder demonstrar, de uma forma mais convincente, o comportamento de leis de potência da distribuição de caudais de cheia será através do estudo de paleocheias em diversos rios. Contudo, parece haver alguma controvérsia e falta de consenso na literatura recente sobre este aspecto, nomeadamente pela eventual presença de não-estacionariedade em séries constituídas por dados sistemáticos e não-sistemáticos, ao longo do período do Holoceno (e.g. KNOX e KUNDZEWICZ, 1997).

Para terminar, embora este seja um caminho interessante e promissor, dever-se-á ter ainda alguma cautela na aplicabilidade de leis de potência no estudo de caudais de cheia, sendo necessário mais investigação em torno desta temática.

BIBLIOGRAFIA

- BENDJOUDI, H., HUBERT, P. e SCHERTZER, D. (1997) – “Interprétation multifractale des courbes intensité-durée-fréquence des précipitations”. C.R. Acad. Sci. Paris, 325, Série II, pp. 323-326.
- BRYSON, M. C. (1974) – “Heavy-tailed distribution: properties and tests”. *Technometrics*, Vol. 16(1), pp. 61-68.
- CHOW, V. T., MAIDMENT, D. R. e MAYS, L. W. (1988) – “Applied Hydrology”. Ed. McGraw-Hill, International Edition, Civil Engineering Series.
- CLAUSET, A., SHALIZI, C.R. e NEWMAN, M. E. J. (2009) – “Power-law distributions in empirical data”. Disponível em arXiv.org → physics → arXiv: 0706.1062v2, pp. 1-43.
- CROVELA, M. E. e TAQQU, M. S. (1998) – “Estimating the heavy tail index from scaling properties”. *Methodology and Computing in Applied Probability*, Vol. 1, No. 1, pp. 1-22.
- GABRIELOV, A., NEWMAN, W.I. e TURCOTTE, D. L. (1999) – “Exactly soluble hierarchical clustering model: inverse cascades, self-similarity and scaling”. *Physical Review E*, Vol.60, pp.5293-5300.
- GUMBEL, E. J. (1960) – “Statistics of Extremes”. Columbia University Press.
- HENRIQUES, A.N.F.G. (1990) – “Modelos de distribuição de frequência de caudais de cheia”. Tese de Doutoramento, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa.
- HILL, B. (1975) – “A Simple General Approach to Inference About the Tail of a Distribution”. *Ann. Statist.* Vol.3(5), pp.1163-1174.
- HIPEL, K. W. (1994) - “Stochastics and Statistical Methods in Hydrology and Environmental Engineering Extreme Values: Flood and Droughts” Part II. *Partial-Duration Series*, Vol.1, Kluwer Academic Publishers, pp. 73-121.
- HOOGE, C., LOVEJOY, S., SCHERTZER, D., MALOUIN, J.F. e SCHMITT, F. (1994) – “Multifractal phase transitions: the origin of self-organized critically in earthquakes”. *Nonlinear Processes in Geophysics*. Vol.1, pp.191-197.
- HOSKING, J. R. M. e WALLIS, J. R. (1997) - “Regional Frequency Analysis - an approach based on L moments”. 1st Ed., Cambridge University Press, Cambridge.
- HUBERT P., JAVELLE P., BENDJOUDI H., LANG M., SCHERTZER D. e TCHIGUIRINSKAIÀ I. (2000) - “Deux modélisations invariantes d'échelle des courbes QdF”. *Colloque PNRH 2000*, Toulouse, 16-17 mai 2000.
- HUBERT P., TCHIGUIRINSKAIÀ I., BENDJOUDI H., SCHERTZER D. & KATZ, R.W. (2002) – “Do weather or climate variables and their impacts have

- heavy-tailed distributions?”. Proceedings of the 13th Symposium on Global Change and Climate Variations.
- KATZ, R.W., PARLANGE, M. B. e NAVEAU (2002) – “Statistics of extremes in hydrology”. *Advances in Water Resources*, Vol. 25, pp. 1287- 1384.
- KIDSON, R. e RICHARDS, K. S. (2005) – “Flood frequency analysis: assumptions and alternatives”. *Progress in Physical Geography*, Vol. 29, No. 3, pp. 392-410.
- KNOX, J.C. e KUNDZEWICZ, Z.W. (1997) – “Extreme hydrological events, palaeo-information and climate change”. *Hydrological Sciences*, Vol.42(5) pp.765-779.
- LEVY, P. (1925) – “Calcul des probabilités”. Gauthier Villar, Paris.
- LOVEJOY S. (2003) – “Multifractal modelling of floods, Paleofloods, Historical Floods and Climatic Variability”. Application in Flood Risk Assessment, Thorndycraft V.R., Benito G., Barriendas M & Llasat M.C editors, Proceedings of the PHEFRA Workshop, Barcelona 16-19th October 2002, CSIC, Madrid, pp.256-260.
- MALAMUD, B.D. e TURCOTTE, D.T. (1996) – “The 1993 Mississippi river flood: a one hundred or a one thousand year event?”. *Environmental & Engineering Geoscience*, Vol. II (4), pp. 479-486.
- MALAMUD, B.D. e TURCOTTE, D.T. (1999) – “Self-affine time series I: generation and analyses”. *Advances in Geophysics*, Vol. 40, pp. 1-90.
- MALAMUD, B.D. e TURCOTTE, D.T. (2003) – “Shelf record of climatic changes in flood magnitude and frequency, north-coastal California: Comment”. *Geology*, Vol. 31 (3), pp. 288.
- MALAMUD, B.D. e TURCOTTE, D.T. (2006) – “The applicability of power-laws frequency statistics to floods”. *Journal of Hydrology*, Vol. 332, pp. 168-180.
- MANDELBROT, B. B. (1967) – “How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension”. *Science*, Vol. 156, pp.636-638.
- MANDELBROT, B. B. (1974) – “Intermittent turbulence in self-similar cascades: divergence of high moments and dimension of the carrier”. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 62, pp.331-358.
- MANDELBROT, B. B. (1991) – “Objectos Fractais”. Ed. Gradiva, Coleção Ciência Aberta.
- MEERSCHAERT, M.M. e SCHEFFLER, H.P (2003) – “Nonparametric methods for heavy tailed vector data: A survey with applications from finance and hydrology”. *Recent advances and trends in nonparametric statistics*, Ed. M. G. Akritas and D.N. Politis, Eds., Elsevier Science, pp. 265-279.
- NOLAN, J. P. (2005) – “Stable Distributions. Models for Heavy Tailed Data”. Ed. Birkhauser.
- PETERS, O. e CHRISTENSEN, K. (2002) – “Rain: relaxations in the sky”. *Physical Review E*, vol. 66, Issue 3.
- RAO, A.R. e HAMED, K.A. (2000) – “Flood Frequency Analysis”. CRC press LLC.
- RODRÍGUEZ-ITURBE I. e RINALDO, A. (2001) – “Fractal River Basins. Chance and Self-Organization”. Cambridge University Press, UK.
- ROSSI, F., FIORENTINO, M. e VERSACE, P. (1984). “Two-component extreme value distribution for flood frequency analysis”. *Water Resources Research*, 20(7), pp.847-856.
- SERRA, P. (2000) – “Caudais de cheia excepcionais do Rio Douro na Régua”. Comunicação apresentada no 5º Congresso da Água.
- SMITH, J. A. (1989) – “Regional flood frequency analysis using extreme order statistics of the annual peak record”. *Water Resources Research*, 25 (2), pp. 311-317.
- SNIRH (2007) – “Sistema Nacional de Informação de Recursos Hídricos”. Instituto da Água. Base de dados disponível em <http://snirh.pt/>
- STEDINGER, J.R., VOGEL, R.M. e FOUFOULA-GEORGIOU, E. (1993) – “Frequency analysis of extreme events”. In Maidment, D. editor, *Handbook of Hydrology*, Ed. McGrawHill, New York.
- TURCOTTE, D. L. e MALAMUD, B (2004) – “Landslides, forest fires and earthquakes: examples of self-organized critical behaviour”. *Physica A*, Vol.340(4), pp.580-589.
- TURCOTTE, D. L., MALAMUD, B.D., MOREIN, G. e NEWMAN, W. (1999) – “An inverse-cascade model for self-organized critical behavior”. *Physica A*, Vol.268, pp.629-643.
- TURCOTTE, D. L. (1999) – “Self-organized critically”. *Reports on Progress in Physics*, Vol.62, pp.1377-1429.
- TURCOTTE, D. L. (1994) – “Fractal theory and the estimation of extreme floods”. *Journal of Research of the National Institute of Standards and Technology*, Vol.99, pp.377-389.
- TURCOTTE, D. L. e GREENE, L. (1993) – “A scale-invariant approach to flood-frequency analysis”. *Stochastic Hydrology and Hydraulics*, Vol.7, pp.33-40.
- YEN, B. (2002) – “System and component uncertainties in water resources”. In Bogardi, J.J. and Kundzewicz, Z. W., editors, *Risk, reliability, uncertainty and robustness of water resources systems*, Cambridge University Press, pp.42-133.
- WERON, R. (2001) – “Levy-stable distributions revisited: tail index $\rightarrow 2$ does not exclude the Levy-stable regime”. *International Journal of Modern Physics*, Vol. 12, No. 2, pp. 209-223.