

EQUAÇÕES DE BOUSSINESQ COM CARACTERÍSTICAS DISPERSIVAS MELHORADAS. APLICAÇÕES

BOUSSINESQ-TYPE EQUATIONS WITH IMPROVED DISPERSION CHARACTERISTICS. APPLICATIONS

José Simão Antunes do Carmo

IMAR – Instituto do Mar – Universidade de Coimbra, Departamento de Engenharia Civil, Pólo II da Universidade /// 3030-788 Coimbra, PORTUGAL /// Associado da APRH com o número 1226 /// jsacarmo@dec.uc.pt

RESUMO: Neste trabalho é desenvolvida uma nova aproximação das equações clássicas de Boussinesq, com características dispersivas melhoradas, e utilizado um esquema numérico apropriado para a resolução do sistema de equações resultante.

Considerando um simples parâmetro para ter em conta os efeitos dispersivos, a discretização adoptada permite comparar resultados numéricos de duas aproximações matemáticas destas equações (Boussinesq clássico e com características dispersivas melhoradas) com a solução analítica aproximada das equações.

Entre os resultados apresentados neste trabalho, destacam-se comparações de soluções numéricas de ondas geradas por pressões móveis à superfície (casos típicos de embarcações) considerando três funções de pressão (duas listadas na literatura da especialidade e uma terceira proposta) e duas aproximações das equações (Boussinesq clássico e modelo com características dispersivas melhoradas).

O modelo numérico desenvolvido é testado para uma embarcação com 15 m de comprimento, que se move num canal com 10 m de profundidade, a uma velocidade de 5.0 m/s e exerce uma pressão à superfície de 4900 N/m².

Palavras-chave: Equações de tipo Boussinesq, características dispersivas melhoradas, pressão móvel à superfície, ondas geradas por embarcações.

ABSTRACT: *In this work, a new approximation of the classical Boussinesq equations with improved dispersive characteristics is developed, along with an appropriate numerical scheme to solve the resulting system of equations.*

Considering a single parameter to take into account the dispersive effects, the adopted discretization allow us to compare numerical results of two mathematical approximations (the classical Boussinesq and the improved model with additional terms of dispersive origin) with the approximate analytical solution of the equations.

Among the results presented in this paper, we highlight comparisons of numerical solutions of waves generated by a mobile pressure at the surface (typical cases of boats), considering three functions of pressure (two listed in the specialized literature and a proposal third one) and two approximations of the equations (the classical Boussinesq and the model with improved dispersive characteristics).

The numerical model is tested for a boat of 15 m in length, moving in a channel 10 m deep at a speed of 5.0 m/s, and exerting a pressure of 4900 N/m² at the surface.

Keywords: *Boussinesq-type equations, improved dispersive characteristics, mobile pressure at surface, boat generated waves.*

1. INTRODUÇÃO

O primeiro modelo de ondas, com inclusão de efeitos dispersivos (solução fraca) e não-lineares e uma aproximação linearizada para a pressão não-hidroestática, foi deduzido por Boussinesq em 1872.

As equações originais foram apresentadas para uma profundidade constante. Mais tarde, Mei e LeMehaute (1966) e Peregrine (1967) deduziram as equações de Boussinesq para profundidade variável. Enquanto Mei e LeMehaute utilizaram a velocidade no fundo como variável dependente, Peregrine utilizou a velocidade média em profundidade e assumiu uma variação linear da componente vertical da velocidade com a profundidade.

Devido à grande popularidade das equações deduzidas por Peregrine, estas equações são frequentemente referidos entre a comunidade científica da especialidade como equações de Boussinesq para profundidade variável.

As equações clássicas de Boussinesq são válidas para valores relativamente pequenos de kh e H/h , em que kh e H/h são parâmetros que representam a profundidade relativa (dispersão) e a declividade da onda (não-linearidade), respectivamente.

Madsen *et al.* (1991) e Madsen e Sørensen (1992) incluíram termos de ordem superior no modelo clássico de Boussinesq, com coeficientes ajustáveis para profundidades constante e variável, respectivamente. Como alternativa às equações de Madsen *et al.* (1991), Beji e Nadaoka (1996) apresentaram um modelo significativamente melhorado das equações de Boussinesq. Estão na base dos desenvolvimentos apresentados neste trabalho as hipóteses e os princípios adoptados por Beji e Nadaoka (1996).

A perturbação na superfície livre pode resultar em consequência do movimento de um objecto nesta superfície, de uma perturbação no fundo, ou do movimento de um objecto no seio da massa líquida. O primeiro caso está associado a uma pressão móvel à superfície, sendo este o problema a ser investigada no presente trabalho.

O modelo numérico cujos principais desenvolvimentos são apresentados neste artigo é verificado para dois casos de teste, por comparação da solução numérica da onda solitária com a solução analítica aproximada destas equações. Seguidamente são apresentadas e discutidas qualitativamente soluções numéricas das ondas geradas por pressões móveis à superfície, considerando diferentes funções de pressão.

2. FORMULAÇÕES

2.1. Formulação matemática

Sejam as equações de continuidade e de conservação da quantidade de movimento, a duas dimensões no plano vertical, relativas ao escoamento de um fluido viscoso e incompressível submetido à acção da gravidade. Definindo os pequenos parâmetros $\epsilon = a/h_0$ e $\sigma = h_0/l$, em que h_0 , l e a representam, respectivamente, uma profundidade, um comprimento e uma amplitude características e c_0 representa a celeridade crítica ($c_0 = \sqrt{gh_0}$), as equações fundamentais e as condições de fronteira são em seguida devidamente adimensionalizadas. Detalhes sobre o procedimento adoptado podem ser consultados em Antunes do Carmo (2004) e Antunes do Carmo (2010).

Assumindo complementarmente que $0(\epsilon) = 0(\sigma^2)$, com $\sigma \ll 1$ (*hipótese fundamental da água pouco profunda*), e considerando uma pressão p_s na superfície livre, obtém-se o seguinte sistema (equações do tipo Boussinesq) na forma adimensional:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\eta - \xi/\epsilon)}{\partial t} + \frac{\partial[(1 - \xi + \epsilon\eta)\bar{u}]}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial\bar{u}}{\partial t} + \epsilon\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial x} + \sigma^2\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} + \sigma^2\frac{\eta}{2}\frac{\partial^3\xi}{\partial x\partial t^2} & \\ + \sigma^2\left[\frac{1 - \xi}{2\epsilon}\frac{\partial^3\xi}{\partial x\partial t^2} - \frac{(1 - \xi)^2}{3}\frac{\partial^3\bar{u}}{\partial x^2\partial t} + (1 - \xi)\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial x\partial t}\right] & \\ + \frac{1 - \xi}{2}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\frac{\partial\bar{u}}{\partial t} + (1 - \xi)\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial t}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x} + (1 - \xi)\frac{\partial^3\xi}{\partial x^2\partial t}\bar{u} & \\ + \frac{\partial p_s}{\partial x} - \frac{\tau_s(\epsilon\eta) - \tau_f(-1 + \xi)}{\epsilon\sigma(1 - \xi + \epsilon\eta)} &= O(\sigma^4, \epsilon\sigma^2) \end{aligned} \quad (1)$$

sendo R o número de Reynolds, igual a h_0c_0/ν . O sistema de equações (1) é aplicável à geração e propagação de ondas em condições mais gerais, permitindo considerar: *i*) variações temporais do fundo; *ii*) tensões de atrito no fundo, e *iii*) tensões na superfície livre.

Qualquer que seja o valor de ϵ no sistema de equações (1), conservando apenas os termos de primeira ordem (ordem 1 em σ^2) no desenvolvimento anterior obtêm-se as equações do tipo Saint-Venant ou “*Shallow-water equations*”:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\eta - \xi/\epsilon)}{\partial t} + \frac{\partial[(1 - \xi + \epsilon\eta)\bar{u}]}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial\bar{u}}{\partial t} + \epsilon\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial x} + \sigma^2\frac{1 - \xi}{2\epsilon}\frac{\partial^3\xi}{\partial x\partial t^2} & \\ + \frac{\partial p_s}{\partial x} - \frac{\tau_s(\epsilon\eta) - \tau_f(-1 + \xi)}{\epsilon\sigma(1 - \xi + \epsilon\eta)} &= O(\sigma^2) \end{aligned} \quad (2)$$

O texto deste artigo foi submetido para revisão e possível publicação em Setembro de 2011, tendo sido aceite pela Comissão de Editores Científicos Associados em Outubro de 2011. Este artigo é parte integrante da *Revista Recursos Hídricos*, Vol. 32, Nº 2, 7-16, Novembro de 2011. © APRH, ISSN 0870-1741 | DOI 10.5894/rh32n2-1

Em variáveis dimensionais, eliminando a barra sobre a variável u para simplificação de escrita e com diferente notação, aquelas duas aproximações escrevem-se:

- **Ordem 2 em σ^2** (Equações do tipo Boussinesq)

$$\begin{aligned} h_t + (hu)_x &= 0 \\ u_t + uu_x + g\eta_x + \eta_x \xi_{tt} + 0.5(h_0 - \xi + \eta) \xi_{xtt} \\ &- \left[(h_0 - \xi)^2 / 3 \right] u_{xxt} + (h_0 - \xi) \xi_x u_{xt} \\ &+ 0.5(h_0 - \xi) \xi_{xx} u_t + (h_0 - \xi) \xi_{xt} u_x \\ &+ (h_0 - \xi) \xi_{xtt} u - (1/\rho)(p_s)_x \\ &- \left[\tau_s(\eta) - \tau_f(\xi) \right] / (\rho\eta) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

- **Ordem 1 em σ^2** (Equações do tipo Saint-Venant)

$$\begin{aligned} h_t + (hu)_x &= 0 \\ u_t + uu_x + g\eta_x + 0.5(h_0 - \xi) \xi_{xtt} \\ &- (1/\rho)(p_s)_x - \left[\tau_s(\eta) - \tau_f(\xi) \right] / (\rho h) = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

nas quais h representa a profundidade do escoamento; h_0 a profundidade em repouso; ξ a cota do fundo; u a componente horizontal da velocidade; t o tempo; g a aceleração da gravidade; ρ a massa volúmica do fluido; p_s uma pressão na superfície livre; ν a viscosidade cinemática do fluido; τ_s e τ_f representam tensões de atrito na superfície livre e no fundo, respectivamente. Considerando o escoamento de um fluido viscoso sobre um fundo fixo e tensões à superfície desprezáveis, o sistema de equações (3) resume-se à seguinte forma:

$$\begin{aligned} h_t + (hu)_x &= 0 \\ u_t + uu_x + g(h + \xi)_x - \left[(h_0 - \xi)^2 / 3 \right] u_{xxt} \\ &+ (h_0 - \xi) \xi_x u_{xt} + 0.5(h_0 - \xi) \xi_{xx} u_t \\ &- (1/\rho)(p_s)_x + \tau_f(\xi) / (\rho\eta) = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Considerando um parâmetro de dispersão β , com valores a serem determinados com base na relação de dispersão obtida por Beji e Nadaoka [1996], e procedendo à simples adição e subtração dos termos de origem dispersiva contidos na segunda equação do sistema (5) podemos escrever:

$$\begin{aligned} h_t + (hu)_x &= 0 \\ u_t + uu_x + g(h + \xi)_x - (1 + \beta) \left[(h_0 - \xi)^2 / 3 \right] u_{xxt} \\ &+ \beta \left[(h_0 - \xi)^2 / 3 \right] u_{xxt} + (1 + \beta)(h_0 - \xi) \xi_x u_{xt} \\ &- \beta(h_0 - \xi) \xi_{xx} u_t + 0.5(1 + \beta)(h_0 - \xi) \xi_{xx} u_t \\ &- 0.5\beta(h_0 - \xi) \xi_{xx} u_t - (1/\rho)(p_s)_x + \tau_f(\xi) / (\rho\eta) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Usando a aproximação $u_t = -g\eta_x$ para substituição parcial, apenas dos termos proporcionais a β do sistema (6), obtém-se a seguinte aproximação com características dispersivas melhoradas.

$$\begin{aligned} h_t + (hu)_x &= 0 \\ u_t + uu_x + g(h + \xi)_x - (1 + \beta) \left[(h_0 - \xi)^2 / 3 \right] u_{xxt} \\ &- \beta g \left[(h_0 - \xi)^2 / 3 \right] \eta_{xxx} + (1 + \beta)(h_0 - \xi) \xi_x u_{xt} \\ &+ \beta g (h_0 - \xi) \xi_x \eta_{xx} + 0.5(1 + \beta)(h_0 - \xi) \xi_{xx} u_t \\ &+ 0.5\beta g (h_0 - \xi) \xi_{xx} \eta_x - (1/\rho)(p_s)_x + \tau_f(\xi) / (\rho h) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

2.2. Formulação numérica

Transformação das equações

Agrupando os termos que contêm derivadas em tempo da variável u , podemos reescrever o sistema anterior na seguinte forma equivalente,

$$\begin{aligned} h_t + hu_x + uh_x &= 0 \\ r_t = -uu_x - g(h + \xi)_x + \beta g \left[(h_0 - \xi)^2 / 3 \right] \eta_{xxx} \\ &- \beta g (h_0 - \xi) \xi_x \eta_{xx} - 0.5\beta g (h_0 - \xi) \xi_{xx} \eta_x \\ &+ (1/\rho)(p_s)_x - \tau_f(\xi) / (\rho h) \\ u - (1 + \beta) \left[(h_0 - \xi)^2 / 3 \right] u_{xx} + (1 + \beta)(h_0 - \xi) \xi_x u_x \\ &+ 0.5(1 + \beta)(h_0 - \xi) \xi_{xx} u = r \end{aligned} \quad (8)$$

Para a obtenção da solução do sistema de equações (8) (valores de h e u no instante $t+\Delta t$) é utilizado o seguinte esquema numérico baseado neste último sistema de 3 equações:

- 1 - Previsão de h ($h_p^{t+\Delta t}$) utilizando um esquema semi-implícito para a resolução da 1ª equação, considerando os valores conhecidos de h^t e u^t em todo o domínio.
- 2 - Previsão de r ($r_p^{t+\Delta t}$), por resolução da 2ª equação, considerando os valores de $h^{t+\theta\Delta t} = (1-\theta) h^t + \theta h_p^{t+\Delta t}$, u^t e r^t , conhecidos em todo o domínio.
- 3 - Cálculo da velocidade u no instante $t+\Delta t$ ($u^{t+\Delta t}$), por resolução da 3ª equação, considerando o valor previsto $r_p^{t+\Delta t}$.
- 4 - Cálculo da altura h no instante $t+\Delta t$ ($h^{t+\Delta t}$), considerando os valores de h^t e $u^{t+\theta\Delta t} = (1-\theta) u^t + \theta u^{t+\Delta t}$ conhecidos em todo o domínio.
- 5 - Cálculo da variável r no instante $t+\Delta t$ ($r^{t+\Delta t}$), considerando os valores de r^t , $h^{t+\theta\Delta t} = (1-\theta) h^t + \theta h^{t+\Delta t}$ e $u^{t+\theta\Delta t} = (1-\theta) u^t + \theta u^{t+\Delta t}$ conhecidos em todo o domínio.

Esquemáticamente, a solução do sistema de equações (8), tendo em conta o método numérico descrito, escreve-se na seguinte forma discretizada:

$$\begin{aligned}
& -\frac{u_i^n}{4\Delta x} h_i^{n+1} + \left[\frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i^n \right] h_i^{n+1} + \frac{u_i^n}{4\Delta x} h_{i+1}^{n+1} \\
& = \left[\frac{1}{\Delta t} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i^n \right] h_i^n - u_i^n \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_i^n \\
h_i^{n+\theta} & = (1-\theta) h_i^n + \theta h_i^{n+1} \\
r_i^{n+1} & = r_i^n - \left[u_i^n \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i^n + g \left(\frac{\partial h^{n+\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \right. \\
& \quad - \beta g \frac{(h_0 - \xi)^2}{3} \eta_{xxx} - \beta g (h_0 - \xi) (h_0 - \xi)_x \eta_{xx} \\
& \quad \left. - \beta g \frac{(h_0 - \xi)}{2} (h_0 - \xi)_{xx} \eta_x - \frac{1}{\rho} (p_s)_x + \left(\frac{\tau_f}{\rho h} \right)_i^n \right] \Delta t \\
& \left\{ -(1+\beta) \left[\frac{(h_0 - \xi)^2}{3(\Delta x)^2} - \frac{(h_0 - \xi)}{2\Delta x} \frac{\partial (h_0 - \xi)}{\partial x} \right]_i \right\} u_{i-1}^{n+1} \\
& + \left\{ 1 + (1+\beta) \left[\frac{2(h_0 - \xi)^2}{3(\Delta x)^2} - \frac{h_0 - \xi}{2} \frac{\partial^2 (h_0 - \xi)}{\partial x^2} \right]_i \right\} u_i^{n+1} \\
& - \left\{ (1+\beta) \left[\frac{(h_0 - \xi)^2}{3(\Delta x)^2} + \frac{(h_0 - \xi)}{2\Delta x} \frac{\partial (h_0 - \xi)}{\partial x} \right]_i \right\} u_{i+1}^{n+1} = r_i^{n+1} \\
u_i^{n+\theta} & = (1-\theta) u_i^n + \theta u_i^{n+1} \tag{9}
\end{aligned}$$

Em cada ponto i do domínio, as primeiras derivadas que constam na discretização (9) são aproximadas através dos seguintes esquemas centrados,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_i & = \frac{h_{i+1} - h_{i-1}}{2\Delta x}; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} \\
\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_i & = \frac{\xi_{i+1} - \xi_{i-1}}{2\Delta x}; \quad \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)_i = \frac{\eta_{i+1} - \eta_{i-1}}{2\Delta x}
\end{aligned}$$

e as segundas e terceira derivadas espaciais são estimadas por,

$$\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right)_i = \frac{\xi_{i+1} - 2\xi_i + \xi_{i-1}}{(\Delta x)^2}; \quad \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right)_i = \frac{\eta_{i+1} - 2\eta_i + \eta_{i-1}}{(\Delta x)^2}$$

e

$$\left(\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \right)_i = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \right)_{i^+} + \left(\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \right)_{i^-} \right]$$

com

$$\left(\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \right)_{i^+} = \frac{\eta_{i+2} - 3\eta_{i+1} + 3\eta_i - \eta_{i-1}}{(\Delta x)^3}$$

e

$$\left(\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \right)_{i^-} = \frac{\eta_{i+1} - 3\eta_i + 3\eta_{i-1} - \eta_{i-2}}{(\Delta x)^3}$$

Os sistemas de equações resultantes (1ª e 3ª equações) são tridiagonais.

2.3. Parâmetro de dispersão, β

O valor de β que permite melhorar as características dispersivas do sistema de equações (7) resulta da igualdade da relação de dispersão obtida por Beji e Nadaoka (1996),

$$\frac{\omega^2}{gk} = \frac{kh(1 + \beta k^2 h^2 / 3)}{1 + (1 + \beta) k^2 h^2 / 3} \tag{10}$$

com a relação de dispersão linear $\omega^2/gk = \tanh(kh)$, a qual pode ser aproximada por:

$$\frac{\omega^2}{gk} = \frac{kh + k^3 h^3 / 15}{1 + 2k^2 h^2 / 5} \tag{11}$$

Nas expressões (10) e (11) ω é a frequência da onda e k é o número de onda. Da igualdade destas equações resulta $\beta = 1/5$.

3. COMPARAÇÕES COM A SOLUÇÃO ANALÍTICA APROXIMADA

Aplicou-se o modelo numérico que resolve o sistema de equações (7) à propagação de uma onda solitária num canal com 1.0 m de profundidade e 250 m de comprimento, com o centro da onda inicialmente localizado num ponto situado a 25 m da origem. Consideraram-se o parâmetro de dispersão β igual a 0 e a 0.20 e duas alturas da onda: 0.20 m e 0.30 m.

Compararam-se na Figura 1 a solução analítica (solução aproximada das equações clássicas de Boussinesq) com resultados do modelo numérico, considerando uma onda solitária com 0.20 m de altura e o parâmetro de dispersão $\beta=0$ e $\beta=0.20$. A mesma comparação é repetida na Figura 2, mas para uma altura da onda solitária igual a 0.30 m.

As Figuras 3 e 4 mostram *zooms* da onda representado nas Figuras 1 e 2, no instante $t = 60.0$ s. Embora as diferenças não sejam muito significativas, observa-se em ambas as figuras uma melhor aproximação à solução analítica considerando $\beta=0.20$. Como seria de esperar, atendendo às hipóteses que estão na base da dedução das equações de Boussinesq, as diferenças são mais acentuadas para a onda de maior altura (Figuras 2 e 4).

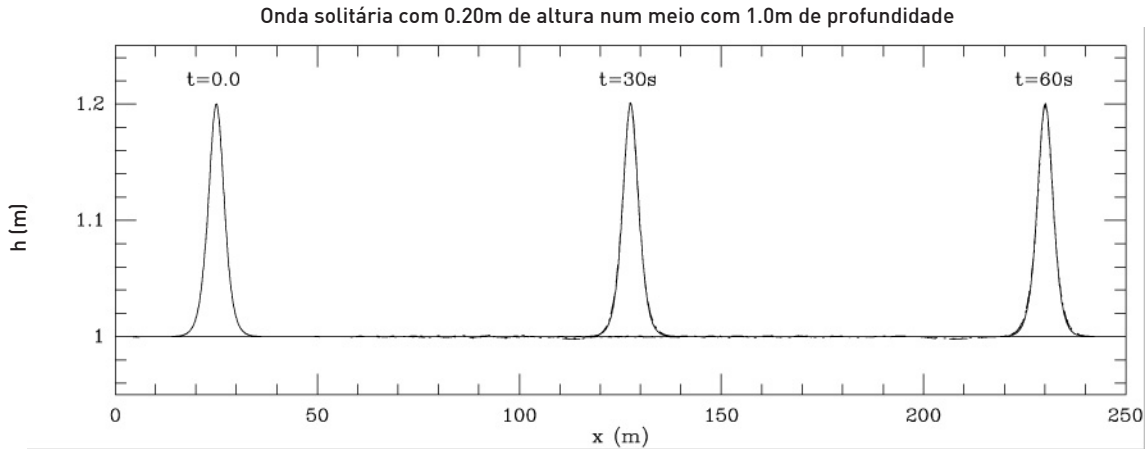


Figura 1 - Propagação de uma onda solitária com 0.20 m de altura. Comparação da solução analítica aproximada (—) com soluções numéricas considerando $\beta = 0$ (- - -) e $\beta = 0.20$ (···).

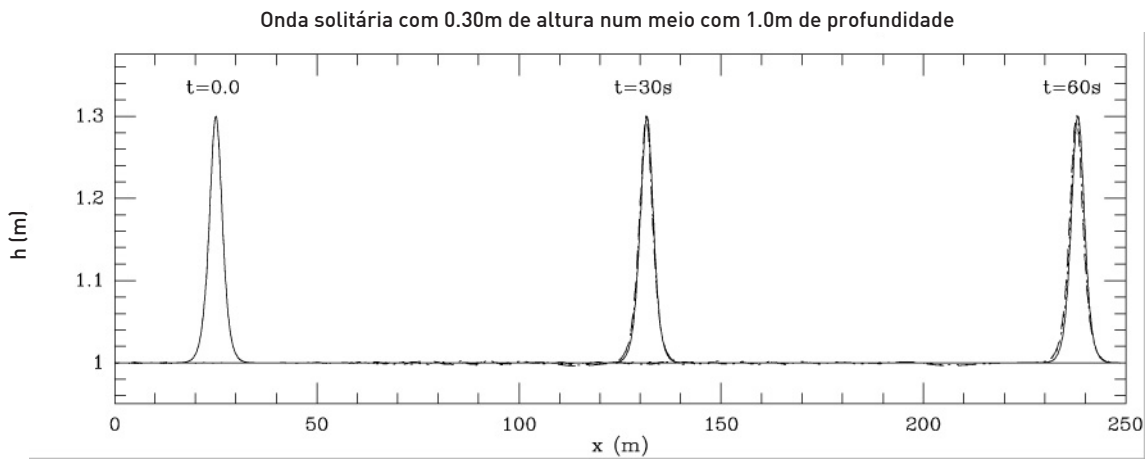


Figura 2 - Propagação de uma onda solitária com 0.30 m de altura. Comparação da solução analítica aproximada (—) com soluções numéricas considerando $\beta = 0$ (- - -) e $\beta = 0.20$ (···).

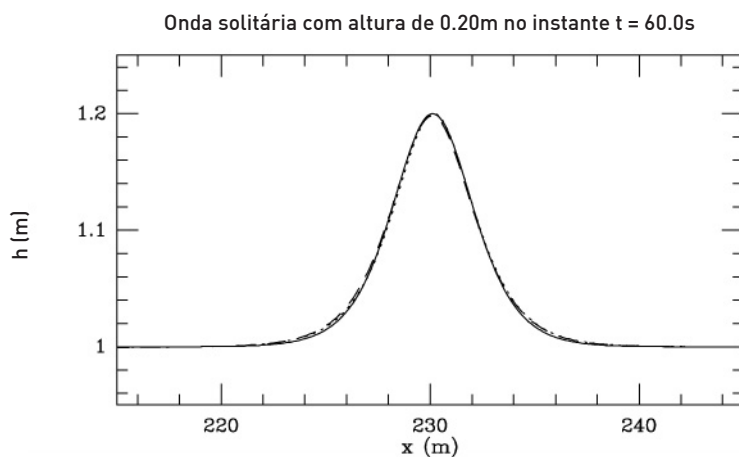


Figura 3 - Onda solitária com 0.20 m de altura no instante t = 60.0 s. Comparação da solução analítica aproximada (—) com soluções numéricas considerando $\beta = 0$ (- - -) e $\beta = 0.20$ (···).

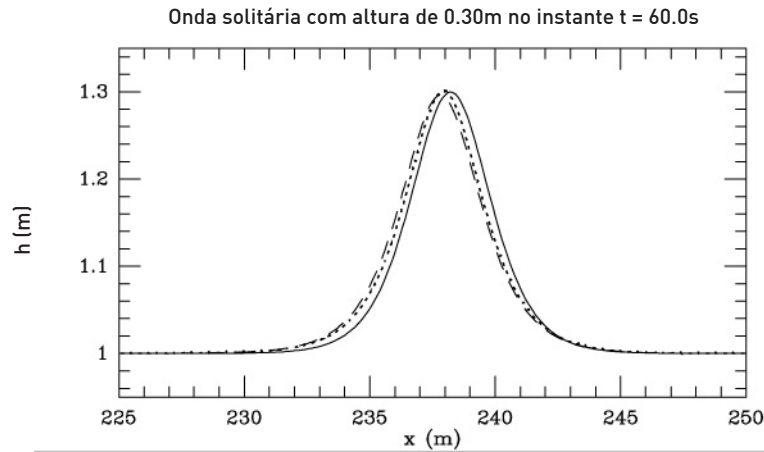


Figura 4 - Onda solitária com 0.30 m de altura no instante $t = 60.0$ s. Comparação da solução analítica aproximada (—) com soluções numéricas considerando $\beta = 0$ (- - -) e $\beta = 0.20$ (···).

4. SIMULAÇÃO DA ONDULAÇÃO PROVOCADA POR UMA EMBARCAÇÃO

A aplicação do modelo desenvolvido à simulação da propagação de ondas geradas por embarcações exige a definição de funções para a pressão móvel à superfície p_s . De entre as várias formulações que constam na bibliografia seleccionaram-se as propostas por Pedersen (2011) e Scullen e Tuck (2011), equações (12) e (13), e sugere-se uma terceira formulação (14) que resulta em consequência de observações do tipo e forma da onda gerada com o avanço da embarcação e de comparações com resultados constantes na bibliografia da especialidade.

$$p_s(x) = p_0 \cos^2\left(\frac{\pi x^2}{2L^2}\right) \quad (12)$$

$$p_s(x) = \frac{16}{\pi^2} p_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{L^2}} \quad (13)$$

$$p_s(x) = p_0 \exp\left(-\frac{x^2}{L^2}\right) \quad (14)$$

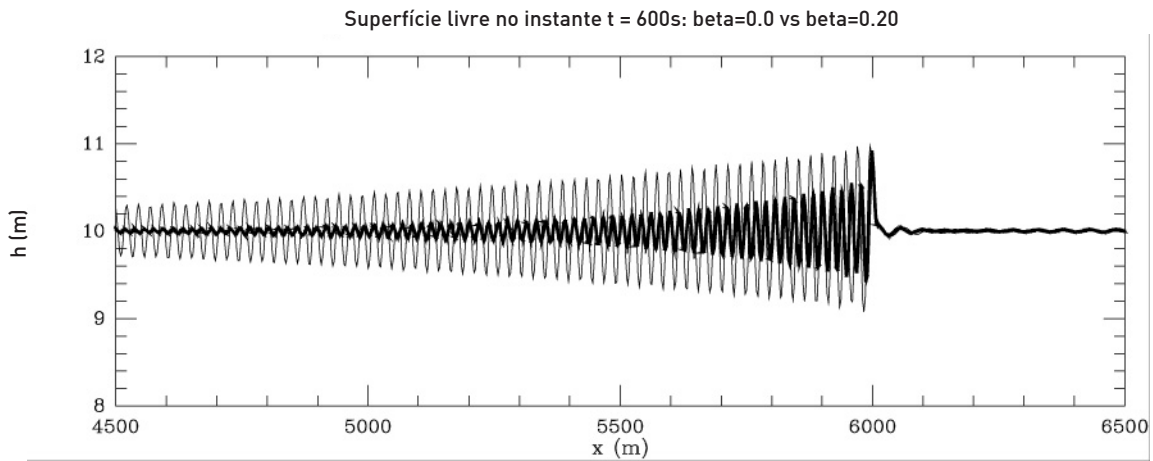
Nestas expressões, L representa o comprimento da embarcação e p_0 é dado por $p_0 = \rho g D$, sendo D o calado da embarcação. Dado o carácter fundamentalmente empírico destas funções, é possível encontrá-las na bibliografia com algumas variações. Assim, a função (12) é igualmente sugerida em Torsvik *et al.* (2009), mas com o argumento $(\pi x)/(2L)$, e a função (13) é usada em Tuck *et al.* (2002) com o coeficiente $9/4$ em vez de $16/\pi^2$.

Seja uma embarcação com 15 m de comprimento e um calado de 0.50 m, movendo-se a uma velocidade de 5 m/s, num canal com 10 m de profundidade e 10000 m de comprimento. Considerando o ponto de partida a 3000 m da origem, comparam-se na Figura 5 resultados do modelo numérico aos 10 e aos 15 minutos após o início do movimento, considerando a formulação de Pedersen (2004) como função de pressão móvel à superfície e parâmetro de dispersão β igual a 0 e a 0.20.

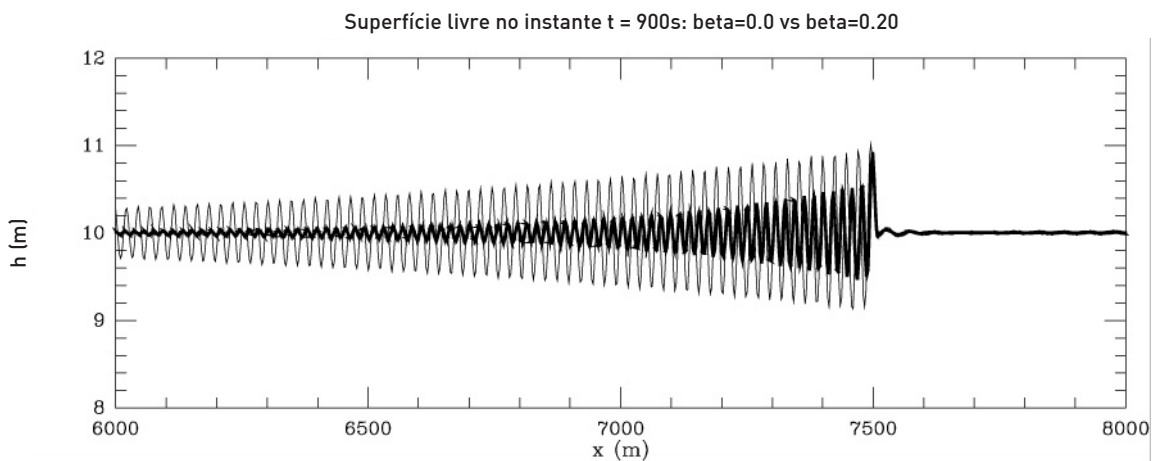
Observando as Figuras 5 a) e b), detectam-se diferenças muito significativas, fundamentalmente em relação ao amortecimento da onda gerada, sendo este comportamento muito mais pronunciado na solução numérica do modelo com características dispersivas melhoradas ($\beta = 0.20$). Tal comportamento seria de esperar, pois deve-se à maior importância relativa dos efeitos não-lineares no modelo clássico de Boussinesq.

Naturalmente que importará proceder a comparações de resultados numéricos com medições de campo e/ou em laboratório para se poder afirmar com rigor qual a solução que melhor traduz o comportamento destas ondas.

Tendo por base elementos constantes na bibliografia da especialidade, em particular registos de campo e resultados das várias formulações empíricas adoptadas em estudos desta natureza, poder-se-á concluir que estas ondas se caracterizam por: *i*) padrões constituídos por ondas de longos e curtos períodos formando trens de ondas não lineares, como exemplificado na Figura 6 [Gallery of Fluid Mechanics, 2011], e *ii*) uma ou duas ondas de maior altura, seguindo-se um trem de ondas com amplitude decrescente, tipicamente com a configuração apresentada na Figura 7 [Sorensen, 1997].



a) Comparação de soluções obtidas, com $\beta = 0$ (—) e $\beta = 0.20$ (- - -), aos 10 minutos após o início do movimento.



b) Comparação de soluções obtidas, com $\beta = 0$ (—) e $\beta = 0.20$ (- - -), aos 15 minutos após o início do movimento.

Figura 5 - Ondulação provocada por uma embarcação com 15 m de comprimento e calado de 0.50 m, movendo-se a uma velocidade de 5.0 m/s, num canal com 10 m de profundidade e 10000 m de comprimento. Função (12) para a pressão móvel à superfície e parâmetro de dispersão β igual a 0 (—) e a 0.20 (- - -).



Figura 6 - Trem de ondas geradas por um pato (Gallery of Fluid Mechanics, 2011).

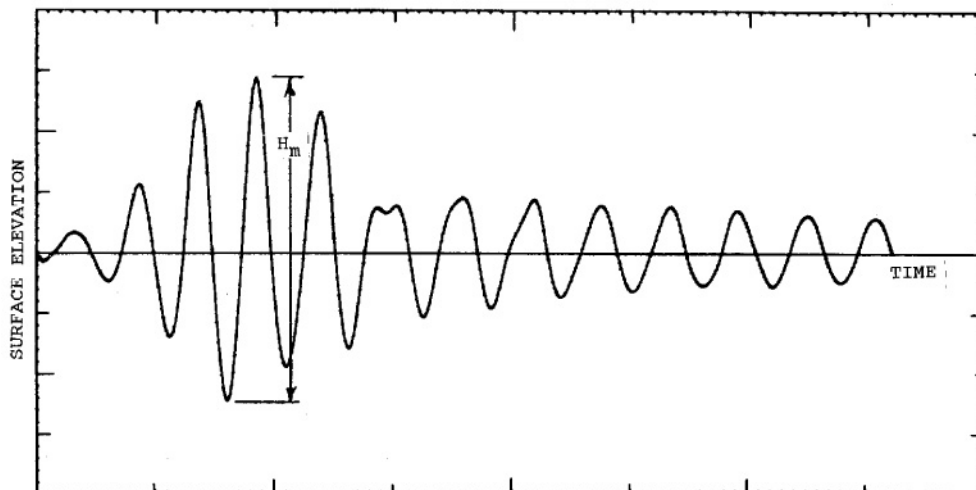


Figura 7 – Registro de uma onda típica, com altura H_m , gerada por uma embarcação (Sorensen, 1997).

Nesta conformidade, poder-se-á igualmente concluir que a solução das equações com características dispersivas melhoradas [equações (7) com $\beta = 0.20$] traduz melhor o comportamento real das ondas geradas, pelo que será este o modelo a adoptar nas aplicações seguintes.

Tendo por objectivo comparar as três formulações (12), (13) e (14) para a pressão móvel à superfície, apresentam-se na Figura 8 resultados numéricos considerando o parâmetro de dispersão $\beta = 0.20$.

Analisando os resultados numéricos obtidos considerando as três funções de pressão - Figura 8 a) e b) - verifica-se uma razoável concordância geral do tipo e comportamento das ondas geradas.

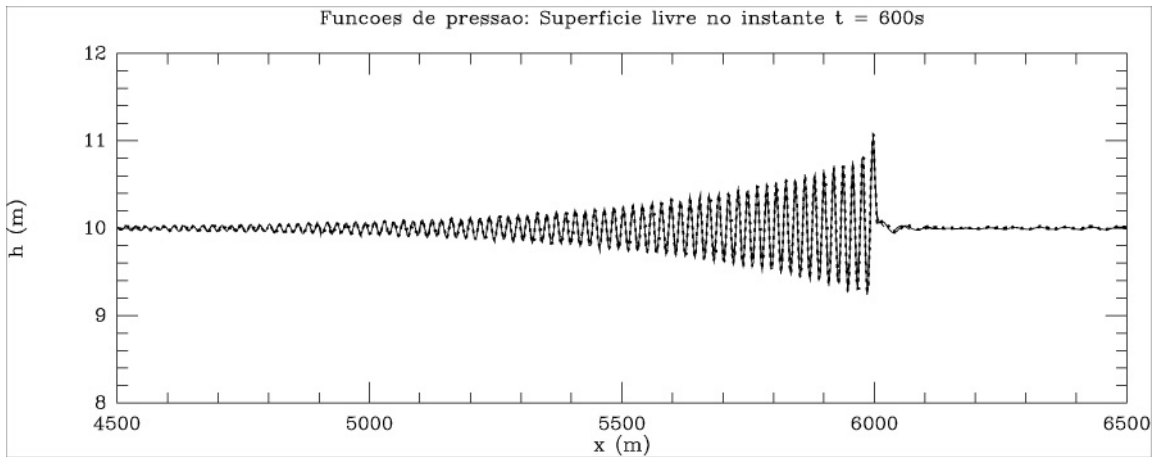
5. CONCLUSÕES

A melhoria das características dispersivas do modelo clássico de Boussinesq não se traduz numa aproximação muito significativa da solução numérica à solução analítica da onda solitária; contudo, regista-se alguma melhoria da solução numérica do modelo original. A influência das características dispersivas é muito mais claramente evidenciada na geração e propagação das ondas geradas por pressões móveis à superfície (casos típicos de ondas geradas por embarcações), em que o padrão é tipicamente constituído por um trem de ondas não lineares de longos e curtos períodos.

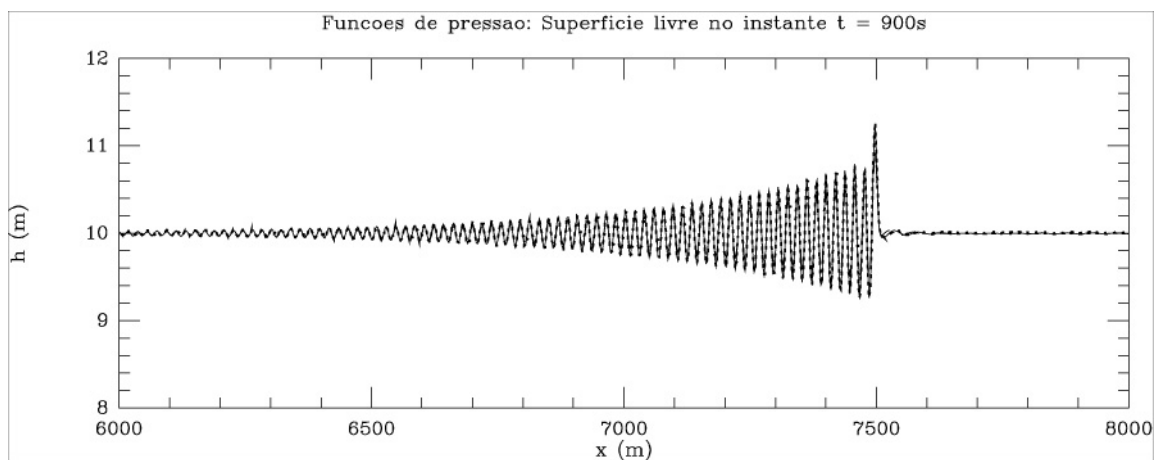
São conhecidos desde longa data os efeitos erosivos provocados pelas ondas geradas por embarcações, sejam elas comerciais (de maior porte) ou de recreio (com menores dimensões e maiores velocidades), nas margens de um rio. Vários estudos têm sido realizados com base em formulações fundamentalmente empíricas resultantes de observações e de medições

no campo e em laboratório. Estes estudos têm revelado a importância de um conhecimento mais aprofundado do comportamento destas ondas para efeitos de definição das rotas de navegabilidade e das características e velocidades mais adequadas das embarcações. É neste contexto e em particular no âmbito de um estudo em curso para o rio Douro que este trabalho se insere.

Os resultados apresentados neste trabalho (para uma hipotética embarcação com 15 m de comprimento, movendo-se num canal com 10 m de profundidade a uma velocidade de 5.0 m/s e exercendo uma pressão à superfície de 4900 N/m²) parecem constituir boas primeiras aproximações; contudo, espera-se que os mesmos venham a ser validados recorrendo a medições das ondas geradas por embarcações com diferentes características, em diferentes meios e com diferentes condições de navegabilidade.



a) Configuração da superfície livre aos 10 minutos após o início do movimento.



b) Configuração da superfície livre aos 15 minutos após o início do movimento.

Figura 8 - Ondulação provocada por uma embarcação com 15 m de comprimento e calado de 0.50 m, movendo-se a uma velocidade de 5 m/s, num canal com 10 m de profundidade e 10000 m de comprimento. Comparação de resultados considerando as formulações (12) [---], (13) [•••] e (14) [—] para funções de pressão móvel à superfície e o parâmetro de dispersão $\beta = 0.20$.

BIBLIOGRAFIA

Antunes do Carmo, J.S., 2004. "Modelação hidrodinâmica em condições de água pouco profunda. Aplicações." Revista *Recursos Hídricos* da APRH, Volume 25, Número 2, 43-56. ISSN 0870-1741.

Antunes do Carmo, J.S., 2010. "Wave-current interactions over bottom with appreciable variations both in space and time." *Journal of Advances in Engineering Software*, Elsevier Science, Volume 41, Número 2, 295-305. ISSN: 0965-9978.

Beji, S. e Nadaoka, K.A., 1996. "Formal derivation and numerical modelling of the improved Boussinesq equations for varying depth." *Ocean Engineering*, 23:691.

Boussinesq, J., 1872. "Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal." *J. Math. Pure et Appl.* 2, 17, 55-108.

Gallery of Fluid Mechanics, 2011. Waves <http://www.fluids.eng.vt.edu/msc/gallery/gall.htm> (Acedido em Setembro/2011).

Madsen, P.A., Murray, R. e Sørensen, O.R., 1991. "A New Form of the Boussinesq Equations with Improved Linear Dispersion Characteristics." *Coastal Engineering*, 15:371.

Madsen, P.A. e Sørensen, O.R., 1992. "A New Form of the Boussinesq Equations with Improved Linear Dispersion Characteristics: 2. A Slowly Varying Bathymetry." *Coastal Engineering*, 18:183.

- Mei, C.C. e LeMehaute, B., 1966. "Note on the Equations of Long Waves Over an Uneven Bottom." *J. Geophys. Res.*, 71:393.
- Pedersen, G., 2011. "Waves generated by moving disturbances in shallow water". In: <http://www.math.uio.no/avdb/fagtema/upstream> [Acedido em Setembro/2011].
- Peregrine, D.H., 1967. "Long Waves on a Beach." *J. Fluid Mech.* 27:815.
- Scullen, D.C. e Tuck, E.O., 2011. "Free-surface elevation due to moving pressure distributions in three dimensions." *Journal of Engineering Mathematics*, Vol. 70, No. 1-3, 29-42 [doi:10.1007/s10665-010-9428-2].
- Sorensen, R.M., 1997. "Prediction of vessel-generated waves with reference to vessels common to the upper Mississippi River System." ENV Report 4, US Army Corps of Engineers, 50 pp.
- Torsvik, T., Pedersen, G. e Dysthe, K., 2009. "Waves generated by a pressure disturbance moving in a channel with a variable cross-sectional topography." *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, 135(3): 120-123.
- Tuck, E.O., Scullen, D.C. e Lazauskas, L., 2002. "Wave patterns and minimum wave resistance for high-speed vessels." 24th Symposium on Naval Hydrodynamics, Fukuoka, Japan, 8-13.