EXTENSÃO DA TEORIA DE ONDAS NÃO-LINEARES ATÉ CONDIÇÕES DE ÁGUA PROFUNDA

NONLINEAR WAVE THEORY EXTENDED TO DEEP WATER CONDITIONS

José S. Antunes do Carmo
IMAR/Universidade de Coimbra, FCTUC, Departamento de Engenharia Civil /// 3030-788 Coimbra /// jsacarmo@dec.uc.pt

RESUMO: Os modelos numéricos são instrumentos úteis para estudar a propagação de ondas em meios com diferentes características, desde águas profundas (ao largo) até condições de água pouco profunda, e investigar a interação de ondas com batimetrias complexas ou estruturas construídas em regiões costeiras e estuarinas.
As capacidades de modelos do tipo Boussinesq e as equações Serre, ou de Green e Naghdi, para reproduzir os processos não lineares de diversas interações são bem conhecidas. No entanto, estas aproximações clássicas restringem-se a condições de águas pouco profundas. Desde meados da década de 90 têm sido desenvolvidas formulações que acrescentam termos de origem dispersiva, em particular para aproximações do tipo Boussinesq.
Neste trabalho é apresentada uma formulação das equações clássicas de Serre com melhores características dispersivas lineares. As equações são resolvidas numericamente por diferenças finitas, após introdução de uma variável auxiliar que agrega as derivadas temporais da velocidade na equação da quantidade de movimento.
A discretização numérica é validada por comparação de resultados com a solução analítica de Serre para uma onda solitária com $a/h_0=0.60$, e com a solução de Stokes para águas intermédias. O desempenho do modelo para propagar ondas até condições de águas profundas ($h/L=0.5$) e fundos com declives acentuados é testado através de comparações com dados experimentais disponíveis na literatura.

Palavras-chave: Equações de Serre, características dispersivas, águas profundas, solução numérica, aplicações.

ABSTRACT: Numerical models are useful tools to study the wave propagation in regions with different characteristics, from deep water (offshore) to shallow water conditions, and to investigate the interaction of waves with complex bathymetries or structures constructed in coastal and estuarine regions.
The ability of Boussinesq-type models and Serre or Green and Naghdi equations to reproduce the nonlinear processes of different interactions is well known. However, these models are restricted to shallow water conditions, and addition of other terms of dispersive origin has been considered since 90's, particularly for Boussinesq-type approximations.
In this work, a new approximation of the classical Serre equations with improved linear dispersive characteristics is developed and written in a weak quasi-conservative form by introducing a dependent variable that aggregates all time derivatives of momentum equation.
The numerical discretization is validated by comparison with the analytical solution for a highly nonlinear propagating solitary wave ($a/h_0=0.60$), and with the Stokes solution for intermediate waters. The model performance to propagate waves from deep water conditions ($h/L=0.5$) and bottoms with large slopes is tested through comparisons with experimental data available in the literature.

Keywords: Serre equations, dispersive characteristics, depth waters, numerical solution, applications.

1. INTRODUÇÃO

O conhecimento das características dos escoamentos associados a ondas e correntes de superfície, e a sua dependência relativamente à batimetria e à geometria da costa, é de considerável importância no projeto de estruturas correntes no ambiente costeiro, como esporões e quebramares. Tal conhecimento também ajuda na previsão das modificações introduzidas na agitação marítima e no transporte e deposição de sedimentos.

Até finais dos anos 70 eram utilizados modelos quase exclusivamente lineares para a simulação do efeito da refração produzida pela variação da profundidade ao longo da direção de propagação da onda e o efeito da difração produzida pelo gradiente de amplitude ao longo da crista da onda. Na década de 80 surgiram outros modelos que passaram e ter em conta não só os efeitos de refração e difração, mas também efeitos da resistência no fundo e de interação onda-corrente; modelos desse tipo foram propostos e usados por Berkhoff *et al*. (1982), Kirby e Dalrymple (1983), Booij (1983), Kirby (1984) e Dalrymple (1988), entre outros. No entanto, dado que se baseiam na teoria linear, aqueles modelos não devem ser utilizados em condições de águas pouco profundas.

Uma série de fatores tornou possível o emprego de modelos matemáticos cada vez mais sofisticados. Não só o conhecimento teórico dos fenómenos envolvidos evoluiu muito, como também os métodos numéricos passaram a ser utilizados de forma mais eficiente. Os grandes avanços ocorridos na tecnologia dos computadores, especialmente a partir dos anos 80, permitiram melhorar o processamento da informação e o armazenamento de grandes volumes de dados, tornando possível o uso generalizado de modelos matemáticos de maior complexidade e com menores restrições.

Nessa fase, as equações de Saint-Venant passaram a ser frequentemente usadas em aplicações práticas. Contudo, como tem sido amplamente demonstrado, em condições de águas pouco profundas, de que são exemplos alguns portos, estuários e largas extensões da zona costeira, e para alguns tipos de ondas, os modelos baseados numa teoria não dispersiva, entre os quais se inclui o modelo de Saint-Venant, são limitados e não são normalmente capazes de obter resultados satisfatórios durante longos períodos de análise (Seabra Santos, 1985).

É atualmente genericamente aceite que, para as aplicações práticas, os efeitos combinados de ondas de gravidade em condições de água pouco profunda devem ser considerados. Mais ainda, os processos de refração, difração, empolamento, reflexão e rebentação da onda, além das interações onda-onda e onda-corrente, bem como os fenómenos decorrentes de importantes e rápidas variações temporais das cotas de fundo, devem ser considerados na sua integridade.

Por conseguinte, apenas modelos de ordem σ^2 (com $\sigma = h/L$, sendo h e L uma profundidade e um comprimento característicos) ou superior, dos tipos Boussinesq ou Serre, são capazes de reproduzir outros efeitos para além dos efeitos dispersivos, incluindo as não-linearidades decorrentes de interações onda-onda e onda-corrente, e as ondas resultantes de variações temporais rápidas das cotas do fundo, de que são exemplos as ocorrências que originam *tsunamis*, ou ainda por deslizamentos de grandes massas de terra para o interior de albufeiras, lagos ou lagunas.

A evolução tecnológica verificada nos últimos anos, tornando possível o uso de facilidades computacionais mais poderosas e a sofisticação dos sistemas de informação e análise, permitiram melhorar o conhecimento da hidrodinâmica e dos processos morfodinâmicos costeiros com recursos e procedimentos de investigação teórica, experimental e aplicada, bem mais sofisticados. Também os métodos numéricos tiveram um grande desenvolvimento, nomeadamente para aplicações no âmbito da engenharia costeira, tornando possível lidar com outro grau de complexidade.

No que se segue é usada a teoria geral da onda em condições de água pouco profunda para o desenvolvimento das diferentes aproximações matemáticas que são atualmente a base dos modelos mais importantes no âmbito da hidrodinâmica e da dinâmica sedimentar. Uma metodologia para extensão de aproximações da água pouco profunda a condições de água profunda é apresentada em seguida, terminando com exemplos de aplicação e discussão de resultados.

O texto deste artigo foi submetido para revisão e possível publicação em abril de 2014, tendo sido aceite pela Comissão de Editores Científicos Associados em abril de 2014. Este artigo é parte integrante da ***Revista Recursos Hídricos***, Vol. 35, Nº 1, 23-35, maio de 2014.

2. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

2.1. Equações básicas

Partindo das equações fundamentais da Mecânica dos Fluidos, em variáveis de Euler, relativas ao escoamento irrotacional e tridimensional de um líquido perfeito [equações de Euler, ou de Navier-Stokes com as hipóteses de incompressibilidade $(d\rho/dt = div\,\vec{v} = 0)$, irrotacionalidade $(rot\,\vec{v} = 0$, ou seja, $u_z = w_x;\ v_z = w_y;\ v_x = u_y)$ e líquido perfeito $(\mu = 0)$]; considerando condições de fronteira e uma adimensionalização apropriadas, e definindo os parâmetros adimensionais $\varepsilon = a/h_0$ e $\sigma = h_0/l$, em que a, h_0 e l representam uma amplitude, uma profundidade e um comprimento horizontal característicos, as equações fundamentais e as condições de fronteira escrevem-se (Seabra-Santos, 1989).

A – Equações fundamentais

$$
\begin{aligned}
& u_x + v_y + w_z = 0 \\
& \varepsilon u_t + \varepsilon^2 u u_x + \varepsilon^2 v u_y + \varepsilon^2 w u_z = -p_x \\
& \varepsilon v_t + \varepsilon^2 u v_x + \varepsilon^2 v v_y + \varepsilon^2 w v_z = -p_y \\
& \varepsilon \sigma^2 w_t + \varepsilon^2 \sigma^2 u w_x + \varepsilon^2 \sigma^2 v w_y + \varepsilon^2 \sigma^2 w w_z = -p_z - 1 \\
& u_z = \sigma^2 w_x \\
& v_z = \sigma^2 w_y \\
& v_x = u_y
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

B – Condições de fronteira

$$
\begin{aligned}
& w = \varsigma_t + \varepsilon u \varsigma_x + \varepsilon v \varsigma_y \quad , \quad p = 0 \\
& w = (1/\varepsilon)\xi_t + u\xi_x + v\xi_y \quad , \quad z = -1 + \xi \\
& p = 0 \quad , \quad z = \varepsilon\varsigma
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

Integrando a primeira das equações (A) entre o fundo e a superfície livre obtém-se a equação de continuidade

$$
\left[\varsigma - (1/\varepsilon)\ \xi\right]_t + \left[(1+\varepsilon\varsigma-\xi)\ \overline{u}\right]_x + \left[(1+\varepsilon\varsigma-\xi)\ \overline{v}\right]_y = 0 \qquad (3)
$$

em que a barra sobre as variáveis representa o valor médio segundo a vertical.

Admitindo em seguida a hipótese fundamental da água pouco profunda, $\sigma = h_0/l < 1$, e desenvolvendo as variáveis em função do pequeno parâmetro σ^2 obtêm-se, após algumas considerações matemáticas, as seguintes equações (Seabra-Santos, 1989)

$$
\begin{aligned}
& u^*_t + \varepsilon u^* u^*_x + \varepsilon v^* u^*_y + \varsigma_x \left(1 + \varepsilon\sigma^2\Gamma^*\right) = 0 \\
& v^*_t + \varepsilon u^* v^*_x + \varepsilon v^* v^*_y + \varsigma_y \left(1 + \varepsilon\sigma^2\Gamma^*\right) = 0
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

em que

$$
\begin{aligned}
\Gamma^* = & \left[-(1+z-\xi)\left(\overline{A}_t + \varepsilon\overline{u}\overline{A}_x + \varepsilon\overline{v}\overline{A}_y - \varepsilon\overline{A}^2\right)\right]_{horiz} \\
& + \left[w_{*t} + \varepsilon\overline{u}w_{*x} + \varepsilon\overline{v}w_{*y}\right]_{fundo} + O\left(\sigma^2\right)
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

representando os termos do primeiro parêntesis reto a aceleração vertical quando o fundo é horizontal e os termos do segundo parêntesis reto a aceleração vertical junto ao fundo.

Desenvolvendo as expressões (4) em segunda aproximação (ordem 2 em σ^2), obtêm-se as seguintes equações do movimento

$$
\begin{aligned}
& \overline{u}_t + \varepsilon\overline{u}\overline{u}_x + \varepsilon\overline{v}\overline{u}_y + \varsigma_x \\
& \quad + \sigma^2\left\{\left[(2/3)(\varepsilon\varsigma-\xi)_x + (1/2)\ \xi_x\right]P + (1/3)(1+\varepsilon\varsigma-\xi)P_x\right\} \\
& \quad + \sigma^2\left[\varepsilon\varsigma_x Q + (1/2)(1+\varepsilon\varsigma-\xi)\ Q_x\right] + \sigma^4 = 0 \\
& \overline{v}_t + \varepsilon\overline{u}\overline{v}_x + \varepsilon\overline{v}\overline{v}_y + \varsigma_y \\
& \quad + \sigma^2\left\{\left[(2/3)(\varepsilon\varsigma-\xi)_y + (1/2)\ \xi_y\right]P + (1/3)(1+\varepsilon\varsigma-\xi)P_y\right\} \\
& \quad + \sigma^2\left[\varepsilon\varsigma_y Q + (1/2)(1+\varepsilon\varsigma-\xi)\ Q_y\right] + \sigma^4 = 0 \\
& P = (1+\varepsilon\varsigma-\xi)\left(\varepsilon\overline{A}^2 - \varepsilon\overline{u}\overline{A}_x - \varepsilon\overline{v}\overline{A}_y - \overline{A}_t\right) \\
& Q = w_t + \varepsilon\ \overline{u}w_x + \varepsilon\ \overline{v}w_y \\
& w = (1/\varepsilon)\ \xi_t + \overline{u}\xi_x + \overline{v}\xi_y \\
& \overline{A} = \overline{u}_x + \overline{v}_y
\end{aligned}
\qquad (6)
$$

em que, de igual modo, a barra sobre as variáveis representa o valor médio segundo a vertical. Em variáveis dimensionais, com fundo fixo ($\xi_t = 0$), as equações de conservação da quantidade do movimento, em segunda aproximação, escrevem-se

$$
\begin{aligned}
& h_t + \left(h\overline{u}\right)_x + \left(h\overline{v}\right)_y = 0 \\
& \overline{u}_t + \overline{u}\overline{u}_x + \overline{v}\overline{u}_y + g\varsigma_x \\
& \qquad + \left[\left(2/3\right)h_x + \left(1/2\right)\,\xi_x\right]P + \left(1/3\right)hP_x + h_x Q + \left(1/2\right)\,hQ_x = 0 \\
& \overline{v}_t + \overline{u}\overline{v}_x + \overline{v}\overline{v}_y + g\varsigma_y \\
& \qquad + \left[\left(2/3\right)h_y + \left(1/2\right)\,\xi_y\right]P + \left(1/3\right)hP_y + h_y Q + \left(1/2\right)\,hQ_y = 0 \\
& P = h\left(\overline{A}^2 - \overline{u}\overline{A}_x - \overline{v}\overline{A}_y - \overline{A}_t\right) \\
& Q = w_t + \overline{u}w_x + \overline{v}w_y \\
& w = \overline{u}\xi_x + \overline{v}\xi_y \\
& \overline{A} = \overline{u}_x + \overline{v}_y
\end{aligned}
\tag{7}
$$

A uma dimensão no plano horizontal, e ainda com fundo fixo, o sistema de equações resultante escreve-se

$$
\begin{aligned}
& h_t + \left(uh\right)_x = 0 \\
& hu_t + huu_x + gh\varsigma_x + \left[h^2\left(P/3 + Q/2\right)\right]_x + \xi_x h\left(P/2 + Q\right) = 0 \\
& P = -h\,\left(u_{xt} + uu_{xx} - u_x^2\right) \\
& Q = \xi_x\left(u_t + uu_x\right) + \xi_{xx}u^2
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Assumindo complementarmente a hipótese de ondas de pequena amplitude relativa, com $O(\varepsilon) = O(\sigma^2)$, partindo do sistema (6) resultam à mesma ordem de aproximação, em variáveis dimensionais

$$
\begin{aligned}
& h_t + \left(h\overline{u}\right)_x + \left(h\overline{v}\right)_y = 0 \\
& \overline{u}_t + \overline{u}\overline{u}_x + \overline{v}\overline{u}_y + g\varsigma_x \\
& \qquad - \left[\left(1/6\right)\,\xi_x\right]P + \left(1/3\right)h_0 P_x + \left(1/2\right)\,h_0 Q_x = 0 \\
& \overline{v}_t + \overline{u}\overline{v}_x + \overline{v}\overline{v}_y + g\varsigma_y \\
& \qquad - \left[\left(1/6\right)\xi_y\right]P + \left(1/3\right)h_0 P_y + \left(1/2\right)\,h_0 Q_y = 0
\end{aligned}
\tag{9}
$$

onde P e Q são dados por $P = -(1-\xi)(\bar{u}_x + \bar{v}_y)_t$ e $Q = (\bar{u}\,\xi_x + \bar{v}\xi_y)_t$. As equações da quantidade de movimento resultantes escrevem-se

$$
\begin{aligned}
& \overline{u}_t + \overline{u}\overline{u}_x + \overline{v}\overline{u}_y + g\varsigma_x + \left(1/6\right)\,h_0\xi_x\,\left(\overline{u}_x + \overline{v}_y\right)_t \\
& \qquad - \left(1/3\right)h_0^2\left(\overline{u}_x + \overline{v}_y\right)_{xt} + \left(1/3\right)h_0\xi_x\left(\overline{u}_x + \overline{v}_y\right)_t \\
& \qquad + \left(1/2\right)h_0\left(\overline{u}\xi_x + \overline{v}\xi_y\right)_{xt} = 0
\end{aligned}
\tag{10}
$$

$$
\begin{aligned}
& \overline{v}_t + \overline{u}\overline{v}_x + \overline{v}\overline{v}_y + g\varsigma_y + \left(1/6\right)\,h_0\xi_y\,\left(\overline{u}_x + \overline{v}_y\right)_t \\
& \qquad - \left(1/3\right)h_0^2\left(\overline{u}_x + \overline{v}_y\right)_{yt} + \left(1/3\right)h_0\xi_y\left(\overline{u}_x + \overline{v}_y\right)_t \\
& \qquad + \left(1/2\right)h_0\left(\overline{u}\xi_x + \overline{v}\xi_y\right)_{yt} = 0
\end{aligned}
\tag{11}
$$

donde, com $\xi_t = 0$

$$
\begin{aligned}
& \overline{u}_t + \overline{u}\overline{u}_x + \overline{v}\overline{u}_y + g\varsigma_x - \left(1/3\right)\,h_0^2\left(\overline{u}_{xxt} + \overline{v}_{xyt}\right) \\
& \qquad + \left(1/6\right)\,h_0\xi_x\,\left(\overline{u}_{xt} + \overline{v}_{yt}\right) + \left(1/3\right)h_0\xi_x\left(\overline{u}_{xt} + \overline{v}_{yt}\right) \\
& \qquad + \left(1/2\right)\,h_0\left(\xi_x\overline{u}_{xt} + \xi_{xx}\overline{u}_t + \xi_y\overline{v}_{xt} + \xi_{xy}\overline{v}_t\right) = 0
\end{aligned}
\tag{12}
$$

$$
\begin{aligned}
& \overline{v}_t + \overline{u}\overline{v}_x + \overline{v}\overline{v}_y + g\varsigma_y - \left(1/3\right)h_0^2\left(\overline{u}_x + \overline{v}_y\right)_{yt} \\
& \qquad + \left(1/6\right)\,h_0\xi_y\,\left(\overline{u}_x + \overline{v}_y\right)_t + \left(1/3\right)h_0\xi_y\left(\overline{u}_x + \overline{v}_y\right)_t \\
& \qquad + \left(1/2\right)h_0\left(\xi_x\overline{u}_{yt} + \xi_{xy}\overline{u}_t + \xi_y\overline{v}_{yt} + \xi_{yy}\overline{v}_t\right) = 0
\end{aligned}
\tag{13}
$$

ou ainda, reescrevendo o sistema completo

$$
\begin{aligned}
& h_t + \left(h\overline{u}\right)_x + \left(h\overline{v}\right)_y = 0 \\
& \overline{u}_t + \overline{u}\overline{u}_x + \overline{v}\overline{u}_y + g\varsigma_x - \left(1/3\right)\,h_0^2\left(\overline{u}_{xxt} + \overline{v}_{xyt}\right) + h_0\xi_x\overline{u}_{xt} \\
& \qquad + \left(1/2\right)\,h_0\left(\xi_{xx}\overline{u}_t + \xi_y\overline{v}_{xt} + \xi_x\overline{v}_{yt} + \xi_{xy}\overline{v}_t\right) = 0 \\
& \overline{v}_t + \overline{u}\overline{v}_x + \overline{v}\overline{v}_y + g\varsigma_y - \left(1/3\right)h_0^2\left(\overline{u}_{xyt} + \overline{v}_{yyt}\right) + h_0\xi_y\overline{v}_{yt} \\
& \qquad + \left(1/2\right)\,h_0\left(\xi_{yy}\overline{v}_t + \xi_y\overline{u}_{xt} + \xi_x\overline{u}_{yt} + \xi_{xy}\overline{u}_t\right) = 0
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Continuando a simplificar as equações do movimento (6), retendo apenas termos até à ordem 1 em σ, ou seja, desprezando os termos de origem dispersiva, aquele sistema de equações escreve-se, em variáveis dimensionais

$$
\begin{aligned}
&h_t + \left(h\overline{u}\right)_x + \left(h\overline{v}\right)_y = 0 \\
&\overline{u}_t + \overline{u}\overline{u}_x + \overline{v}\overline{u}_y + g\varsigma_x = 0 \\
&\overline{v}_t + \overline{u}\overline{v}_x + \overline{v}\overline{v}_y + g\varsigma_y = 0
\end{aligned}
\tag{15}
$$

As aproximações (7), (14) e (15) são conhecidas como equações de Serre, ou Green & Naghdi, Boussinesq e Saint-Venant, respetivamente, a duas dimensões no plano horizontal (modelos 2DH).

2.2. Extensões a condições de água profunda

Os modelos clássicos do tipo Boussinesq, de que é exemplo o modelo de Peregrine (1967), usam aproximações polinomiais quadráticas para a distribuição vertical da velocidade, o que limita as suas aplicações, nomeadamente porque: i) não descrevem com suficiente rigor os efeitos dispersivos em condições de águas intermédias, e ii) apenas propagam corretamente ondas de baixa amplitude relativa. Estas limitações são consistentes com a hipótese fundamental das equações de Boussinessq (1872), a qual assume que os efeitos dispersivos são da mesma ordem de grandeza dos efeitos não-lineares, ou seja, que $O(\varepsilon) = O(\sigma^2)$, com $\varepsilon = a/h$ e $\sigma = h/L << 1$ (hipótese fundamental da água pouco profunda).
As propriedades dispersivas dos modelos convencionais de Boussinesq têm vindo a ser melhoradas, através da modificação dos termos dispersivos (Madsen e Sorensen, 1992) ou usando uma velocidade de referência a uma altura previamente especificada (Nwogu, 1993). Esta técnica permite obter um sistema de equações cuja relação de dispersão linear pode ser ajustada de modo a que as características dispersivas em águas intermédias resultem muito próximas das da teoria linear da onda. Wei *et al.* (1995) estenderam a aproximação de Nwogu para ondas fortemente não-lineares, desenvolvendo modelos que podem não só ser aplicados em condições de águas intermédias mas também simular a propagação de ondas com elevados efeitos de interação não-linear, isto é, $\varepsilon = O(1)$. Em geral, estes modelos resolvem equações com propriedades de dispersão linear bastante rigorosas até $kh \approx 3$ (Nwogu, 1993).
Recorrendo a um polinómio de quarta ordem, Gobbi *et al.* (2000) desenvolveram um modelo com excelentes propriedades dispersivas até à ordem $kh \approx 6$. O comportamento não-linear foi fielmente conseguido até $kh \approx 3$. Naturalmente que esta melhoria de precisão do modelo em relação às aproximações anteriores foi acompanhada de um significativo esforço computacional.
A aproximação polinomial de quarta ordem comporta resultados com derivadas espaciais de quinta ordem num sistema de equações muito complexo, requerendo um esquema numérico de resolução igualmente bastante complexo. Madsen e Schaffer (1998) e Agnon *et al.* (1999) desenvolveram um modelo de equações recorrendo a aproximações polinomiais de ordens ainda mais elevadas.
Usando um esquema numérico de previsão-correção de ordem elevada, previamente utilizado por Wei e Kirby (1995), Lynett e Liu (2002) desenvolveram um código numérico (COULWAVE) com base nas equações do Nwogu para uma e duas camadas.
Embora com características dispersivas mais modestas, mas com muito menor esforço computacional, Beji e Nadaoka (1996) e Liu e Sun (2005) introduziram parâmetros que permitem melhorar as características dispersivas da aproximação clássica de Boussinesq. Mais recentemente, Antunes do Carmo (2013a,b) usou a metodologia de Liu e Sun (2005), com a introdução de dois parâmetros, α e β, para estender as equações de Serre (Serre, 1953) até $kh \approx 3$.
A introdução destes parâmetros tem por objetivo melhorara as características de dispersão lineares dos modelos de tipo Boussineseq e Serre. Tendo presente que linearizando o sistema de equações (7) e desprezando os termos de ordem superior se obtém o sistema (16)

$$
\begin{aligned}
&h_t + \nabla \cdot \left(h\overline{u}\right) = 0 \\
&\overline{u}_t + g\nabla\varsigma = 0
\end{aligned}
\tag{16}
$$

o qual é aplicável à propagação de ondas monocromáticas em água profunda (ao largo), por conseguinte, onde os termos não-lineares e de origem dispersiva do sistema (7) são pouco relevantes mas afetam negativamente a solução. Para que, também nestas condições, seja possível usar as equações do sistema (7) é imprescindível obter aproximações cuja solução em termos da velocidade de propagação de um grupo de ondas se comporte de acordo com a relação de dispersão linear, dada por $\omega^2 = gk\,tanh\,(kh)$.
Nesta conformidade, e de acordo com (16), as variações temporais da velocidade no sistema de equações (7)

são combinadas com a aproximação $\bar{u}_t = -g\nabla\varsigma$ através de parâmetros, ou grandezas escalares, de tal modo que, em condições de águas intermédias a profundas, a relação de dispersão do sistema linearizado tenda para $\omega^2 = gk\,tanh\,(kh)$. Como se demonstra em seguida, os valores dos parâmetros envolvidos são obtidos de modo a aproximar o melhor possível a relação de dispersão do sistema linearizado com a relação $\omega^2 = gk\,tanh\,(kh)$.

Desprezando termos de ordem superior e os termos não lineares na equação (7) resulta a relação de dispersão (17), igualmente obtido por Liu e Sun (2005) para a forma linearizada do sistema (14)

$$\frac{\omega^2}{gk} = \frac{kh\left[1+\left(\alpha/2-\gamma/6\right)k^2h^2\right]}{1+\left(1+\alpha\right)k^2h^2/2-\left(1+\gamma\right)k^2h^2/6} \qquad (17)$$

em que $\omega = 2\pi/T$ é a frequência da onda, T é o período e $k^2 = k_x^2 + k_y^2$, sendo k_x e k_y as componente do número de onda k nas direções x e y, respetivamente.

Por comparação da equação (17) com a relação de dispersão linear de Stokes, $\omega^2/gk = tanh\,(kh)$, podem ser obtidos valores otimizados para os dois parâmetros α e γ. Em termos de velocidade de fase, a equação (17) toma a forma

$$C^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = gh\left[\frac{1+\left(\alpha/2-\gamma/6\right)\left(kh\right)^2}{1+\left(1+\alpha\right)\left(kh\right)^2/2-\left(1+\gamma\right)\left(kh\right)^2/6}\right] \qquad (18)$$

a qual deve ser comparada com a expansão de Padé de segunda ordem da solução linear exata para ondas de Airy, dada por (19)

$$C_{Airy}^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \left(gh\right)\tanh\left(kh\right) = gh\left[\frac{1+\left(kh\right)^2/15}{1+2\left(kh\right)^2/5}\right] + O\left[\left(kh\right)^6\right] \qquad (19)$$

Para que sejam idênticas as equações (18) e (19), terá de verificar-se a relação $\beta = 1.5\alpha - 0.5\gamma = 0.20$. Para os parâmetros α e γ, Liu e Sun (2005) obtiveram primeiras aproximações baseadas em análises de sensibilidade. Para além dos parâmetros α e β, é sugerida neste trabalho a introdução de um novo parâmetro μ, função de h. Como se demonstra, esta metodologia permite obter um modelo geral, que tende para as equações de Saint-Venant em condições de água profunda (ao largo) e para as equações de Serre em água pouco profunda (junto à costa).

Assim, partindo do sistema de equações (8), de que resulta o seguinte sistema (20)

$$\begin{aligned}
&\varsigma_t + \left(uh\right)_x = 0\\
&u_t + uu_x + g\varsigma_x + \left[h_x\xi_x + \left(\xi_x\right)^2 + \frac{h}{2}\xi_{xx}\right]u_t - hh_xu_{xt} - \frac{h^2}{3}u_{xxt}\\
&\quad - hh_xuu_{xx} + \frac{h^2}{3}u_xu_{xx} - \frac{h^2}{3}uu_{xxx} + \left[h\left(u_x\right)^2 + \xi_{xx}u^2\right]\varsigma_x\\
&\quad + \left[h_x\xi_x + \left(\xi_x\right)^2 + \frac{3}{2}h\,\xi_{xx}\right]uu_x + \frac{h}{2}\xi_{xxx}u^2 = 0
\end{aligned} \qquad (20)$$

adicionando e subtraindo termos de origem dispersiva, utilizando a aproximação $u_t = -g\varsigma_x$ e considerando os parâmetros α, β e γ, com $\beta = 1.5\alpha - 0.5\gamma$, Antunes do Carmo (2013a,b) obteve o seguinte sistema de equações (21), com características de dispersão lineares melhoradas. Esta formulação permite aplicações em profundidades intermédias, até valores da dispersão de frequência $\sigma = 0.50$. Considerando tensões de atrito (τ_b) no fundo, as equações resultantes escrevem-se

$$\begin{aligned}
&h_t + \left(uh\right)_x = 0\\
&u_t + uu_x + g\left(h+\xi\right)_x + \left(1+\alpha\right)\left(\Omega u_t - hh_xu_{xt}\right) - \left(1+\beta\right)\frac{h^2}{3}u_{xxt}\\
&\quad + \alpha g\,\Omega\left(h+\xi\right)_x - \alpha ghh_x\left(h+\xi\right)_{xx} - \beta g\frac{h^2}{3}\left(h+\xi\right)_{xxx}\\
&\quad - hh_xuu_{xx} + \frac{h^2}{3}\left(u_xu_{xx} - uu_{xxx}\right) + h\,\left(u_x\right)^2\left(h+\xi\right)_x\\
&\quad + \xi_{xx}u^2\left(h+\xi\right)_x + \left(\Omega + h\,\xi_{xx}\right)uu_x + \frac{h}{2}\xi_{xxx}u^2\\
&\quad + \tau_b/\left(\rho h\right) = 0
\end{aligned} \qquad (21)$$

com $\Omega(x) = h_x\xi_x + 0.5h\xi_{xx} + (\xi_x)^2$, $\beta = 0.20$ e, em primeira aproximação, $\alpha \approx 0.1308$. Testes complementares demostraram que a solução não é muito sensível para valores de α situados no intervalo $\alpha \in [0.12, 0.15]$.

Reescrevendo o sistema (21) com os termos de origem dispersiva [todos os termos de ordem σ^2 no sistema de equações (6)] função de um novo parâmetro μ obtém-se (22)

$$
\begin{aligned}
& h_t + (uh)_x = 0 \\
& u_t + uu_x + g(h+\xi)_x + \mu \Big\{ (1+\alpha)(\Omega u_t - hh_x u_{xt}) \\
& \quad - (1+\beta)\frac{h^2}{3} u_{xxt} + \alpha g \Omega (h+\xi)_x - \alpha g h h_x (h+\xi)_{xx} \\
& \quad - \beta g \frac{h^2}{3}(h+\xi)_{xxx} - hh_x uu_{xx} + \frac{h^2}{3}(u_x u_{xx} - uu_{xxx}) \\
& \quad + h(u_x)^2 (h+\xi)_x + \xi_{xx} u^2 (h+\xi)_x \\
& \quad + (\Omega + h\xi_{xx}) uu_x + \frac{h}{2}\xi_{xxx} u^2 \Big\} + \tau_b/(\rho h) = 0 \qquad (22)
\end{aligned}
$$

Fazendo $\mu = f(h)$ de tal modo que $\mu \rightarrow 1$ quando $h \rightarrow 0$ e $\mu \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow \infty$ e, simultaneamente, $(\alpha, \beta) \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow 0$ e $\alpha \in [0.12, 01.5]$ e $\beta \rightarrow 0.20$ quando $h \rightarrow \infty$ (embora neste caso os valores de α e β não sejam de todo relevantes) reencontramos os sistemas de equações de Serre (20) e de Saint-Venant (15), a uma dimensão no plano horizontal, respetivamente. Uma função $f(h)$ que satisfaz estas condições é dada por (23)

$$
f(h) = \frac{(kh)^2}{senh\left[(kh)^2\right]} \qquad (23)
$$

com $k = 2\pi/L$, sendo L o comprimento de onda. Em particular, $f(h/L = 0.05) = 0.998$ e $f(h/L = 0.50) = 0.001$ e o gráfico da função $f(h)$ tem o andamento mostrado na Figura 1.

No presente trabalho consideraram-se os seguintes valores dos parâmetros: $\alpha = 0.13$, $\beta = 0.20$ e $\mu = 1.0$, com exceção da propagação de uma onda solitária (aplicação (A1) em "4. Aplicações e Resultados"), em que $\alpha = 0$ $\beta = 0$ e $\mu = 1.0$, satisfazendo assim a solução analítica do sistema de equações de Serre.

3. FORMULAÇÃO NUMÉRICA

O sistema de equações (22) é resolvido por um método implícito de diferenças finitas, após agrupamento dos termos com derivadas em tempo da velocidade numa equação adicional. O sistema equivalente de três equações a três incógnitas (h, q e u), que é resolvido numericamente, escreve-se

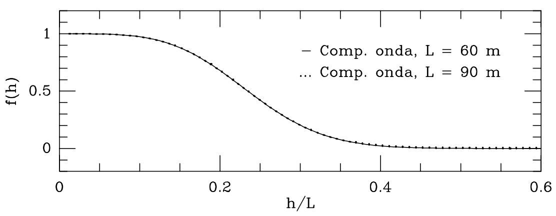


Figura 1 - Gráfico da função $f(h)$ que estabelece a transição entre condições de água profunda $f(h) \rightarrow 0$, com $h/L \geq 0.5$, e pouco profunda $f(h) \rightarrow 1$, com $h/L \leq 0.05$.

$$
\begin{aligned}
& h_t + (uh)_x = 0 \\
& q_t + (uq)_x - uu_x + g\varsigma_x \\
& \quad - \mu \Big\{ \frac{1}{2}\Big[(1+2\alpha) h^2 (u_x)^2 + (1+2\alpha)(\xi_x)^2 u^2 - h\xi_x (u^2)_x \Big]_x \\
& \quad + [\alpha g \Omega + \alpha h u u_{xx}]\varsigma_x - \alpha g h h_x \varsigma_{xx} - \beta g \frac{h^2}{3}\varsigma_{xxx} + \beta \frac{h^2}{3} uu_{xxx} \\
& \quad - \frac{\alpha}{2}\Big[(h\xi_{xx}u^2)_x + h_x \xi_{xx} u^2 - h\xi_{xx} uu_x \Big] + \Big(\alpha - \frac{\beta}{3}\Big) h^2 u_x u_{xx} \Big\} \\
& \quad + \tau_b/(\rho h) = 0 \\
& u + \mu \left[(1+\alpha)\ \Omega u - (1+\alpha)\ h\, h_x u_x - (1+\beta)\frac{h^2}{3} u_{xx} \right] = q \\
& \Omega = \xi_x h_x + \frac{1}{2} h\ \xi_{xx} + (\xi_x)^2 \qquad (24)
\end{aligned}
$$

Um esquema eficiente de resolução do sistema de equações (24), com $\mu = 1$, é detalhadamente apresentado em Antunes do Carmo (2013a,b).

4. APLICAÇÕES E RESULTADOS

O modelo numérico que resolve as equações (22), ou (24), é aplicado à propagação de (A1) uma onda solitária com amplitude de 0.60 m num meio com 1.0 m de profundidade, sendo a correspondente solução numérica comparada com a solução analítica das equações de Serre, (A2) uma onda sinusoidal com altura de 0.02 m, período de 2.02 s e comprimento de onda igual a 3.73 m, num meio com uma profundidade de 0.40 m na secção de entrada e uma barra no interior do domínio, como apresentado na Figura 2, e (A3) uma onda sinusoidal, com altura de 0.05 m, período de 0.85 s e comprimentos de onda de 1.12 m, num meio com profundidade constante i igual a 0.56 m; por conseguinte, trata-se neste caso de condições de água profunda (com $h_0/L = 0.50$).

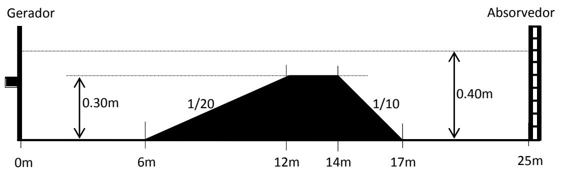


Figura 2 - Batimetria para a propagação de uma onda sinusoidal, com altura de 0.02 m, período de 2.02 s e comprimentos de onda de 3.73 m, sobre uma barra (Antunes do Carmo, 2013b,c).

Na aplicação (A2), $h/L \approx 0.107 > 0.10$ na secção de entrada da onda no domínio, a qual se mantém nos primeiros 6 m (Figura 2), satisfazendo por conseguinte as condições de validade da solução de Stokes de 2ª ordem neste trecho, enquanto não se fizeram sentir eventuais efeitos de reflexões na barra.
Nesta conformidade, é possível comparar a solução numérica do sistema de equações (20) com a correspondente solução analítica (25)-(26) (Seabra-Santos, 1985; Cienfuegos *et al.*, 2006), e a solução numérica do sistema (22), ou (24), sem atrito e com $\alpha = 0.13$, $\beta = 0.20$ e $\mu = 1.0$, com a solução analítica de Stokes (27)-(29).

(S1) Onda solitária

Com fundo fixo e horizontal ($\xi_t = \xi_x = \xi_{xx} = \xi_{xxx} = 0$) o sistema de equações de Serre (8) admite a seguinte solução analítica (25)-(26)

$$\varsigma(x,t) = Hsech^2\left[\sqrt{\frac{3H}{4h_0^2(h_0+H)}}(x - Ct - x_0)\right] \quad (25)$$

$$u = C\left[1 - \frac{h_0}{h_0 + \varsigma}\right] \quad (26)$$

em que h_0 é a profundidade da água em repouso, x_0 é a posição inicial da crista, H é a altura da onda, $C = C_0\sqrt{(1 + H/h_0)}$ e $C_0 = \sqrt{gh_0}$ (g = 9.8).

(S2) Onda de Stokes de 2ª ordem

A elevação da superfície livre é expressa por (27) (Dean e Dalrymple, 1984)

$$\varsigma = \frac{H}{2}\cos(kx - \omega t) + \frac{\pi H^2}{8L}\left\{\frac{\cosh(kh)\left[2 + \cosh(2kh)\right]}{senh^3(kh)}\right\}\cos\left[2(kx - \omega t)\right] \quad (27)$$

a qual representa a soma de duas sinusoides, a segunda das quais com uma amplitude dependente da declividade (h/L) e com uma velocidade angular dupla da sinusoide fundamental dada pela teoria linear. As componentes u e w da velocidade do fluido são, neste caso, dadas por (28) e (29), respetivamente

$$u = \frac{\pi H}{T}\frac{\cosh\left[k(h_0 + z)\right]}{\cosh(kh_0)}\cos(kx - \omega t) + \frac{3}{4}\frac{\pi H}{T}\frac{\pi H}{L}\frac{\cosh\left[2k(h_0 + z)\right]}{senh^4(kh_0)}\cos\left[2(kx - \omega t)\right] \quad (28)$$

$$w = \frac{\quad}{T}\frac{senh\left[k(h \quad z)\right]}{\cosh(kh \;)}sen(kx - \quad t) + -\frac{\pi H}{T}\frac{\pi H}{L}\frac{senh\left[\quad k(h \quad z)\right]}{senh \;(kh \;)}sen\left[2(kx - \quad t)\right] \quad (29)$$

em que $k = 2\pi/L$ é o número de onda e $\omega = 2\pi/T$ é a frequência, sendo L e T o comprimento de onda e o período, respetivamente; com $z = 0$ obtém-se a velocidade à superfície.

As Figuras 3 e 4 mostram comparações de resultados numéricos da variação da superfície livre com as soluções analíticas (25) e (27) em ambas as aplicações (S1) e (S2), respetivamente.

Complementarmente, os resultados obtidos na aplicação (A2) são comparados com dados experimentais obtidos por Beji e Battjes (1993), em três sondas posicionadas em x = 10.5 m, x = 13.5 m e x = 17.3 m (Figura 2). Estas comparações são mostradas nas Figura 5 a), b) e c).

Os resultados numéricos da terceira aplicação (A3) são mostrados na Figura 6, os quais foram obtidos numa sonda situada a uma distância de 10 m da secção de entrada da onda num canal com 50 m de comprimento.

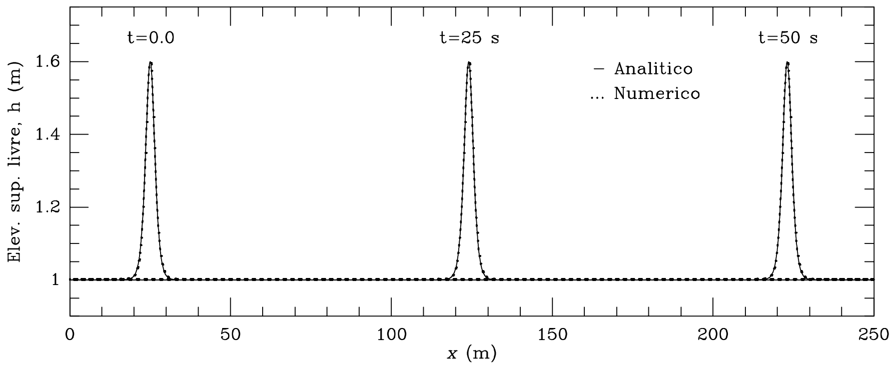


Figura 3 – Propagação de uma onda solitária com altura de 0.60 m, inicialmente posicionada em x = 25 m, num canal com 1.0 m de profundidade. Comparação de resultados numéricos com a solução analítica (S1) (Antunes do Carmo, 2013a).

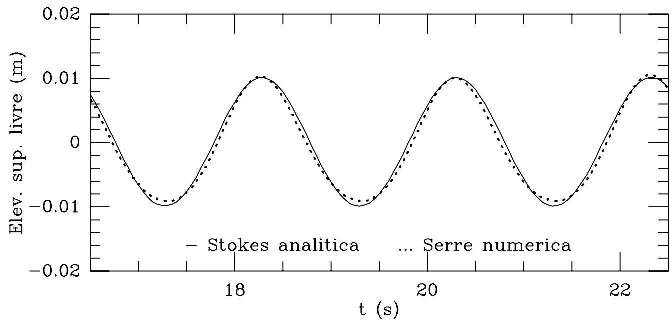
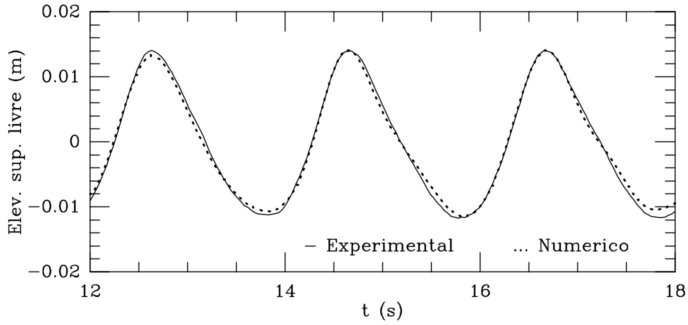
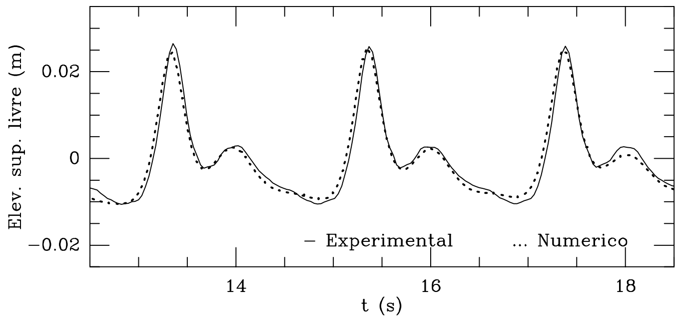


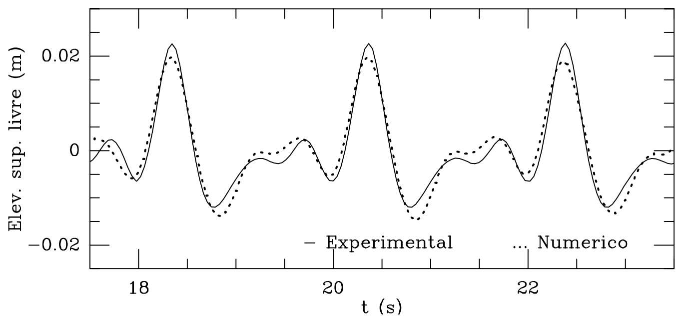
Figura 4 - Propagação de uma onda sinusoidal com altura de 0.02 m, período de 2.02 s e comprimento de onda de 3.73 m, num meio com profundidade de 0.40 m na secção de entrada. Comparação de resultados numéricos obtidos numa sonda situada em x = 3.0 m com a solução analítica (S2).



a) Sonda instalada em x = 10.5 m.



b) Sonda instalada em x = 13.5 m.



c) Sonda instalada em x = 17.3 m.

Figura 5 - Propagação de uma onda periódica com altura de 0.02 m, período de 2.02 s e comprimento de onda de 3.73 m, sobre uma barra. Comparação de dados experimentais com resultados numéricos obtidos em três sondas (Antunes do Carmo, 2013b,c).

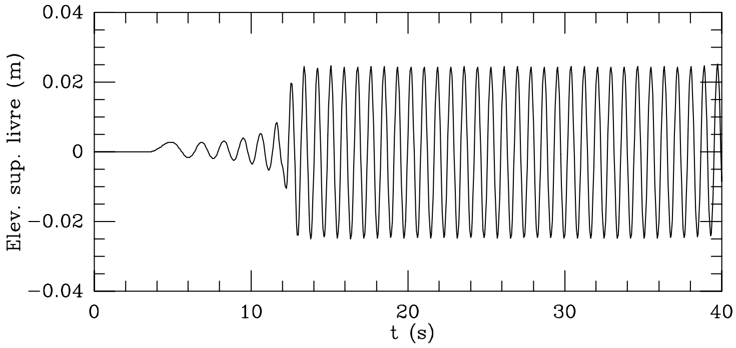


Figura 6 – Propagação de uma onda sinusoidal com altura de 0.05 m, período de 0.85 s e comprimento de onda de 1.12 m, num meio com profundidade em repouso de 0.56 m. Evolução da superfície livre registada numa sonda instalada em x = 10.0 m.

5. DISCUSSÃO E CONCLUSÕES

Analisando os resultados obtidos, poder-se-á concluir que as formulações matemática e numérica do modelo computacional desenvolvido, resultante de uma extensão das equações clássicas de Serre, são consistentes e descrevem com bastante precisão a propagação de ondas desde condições de águas profundas ($h_0/L=0..5$), em águas intermédias e, naturalmente, em águas pouco profundas.

A introdução dos parâmetros α e β permitiu estender as equações de Serre para aplicações em toda a gama de águas intermédias (Antunes do Carmo (2013a,b). Complementarmente, a introdução de um novo parâmetro $\mu=\mu(h)$ deverá permitir generalizar as equações de Serre a condições de águas profundas, para valores de $kh>3$.

Com efeito, trata-se de condições-limite, de que resultam, respetivamente, as equações de Serre, com $\mu \rightarrow 1$, e as equações de Saint-Venant, com $\mu \rightarrow 0$. Com $(\alpha, \beta) \rightarrow 0$ é reencontrado o modelo original de Serre (8), ou (20), e tal foi considerado para obtenção dos resultados da aplicação (A1); contudo, como é demonstrado analiticamente em Liu e Sun (2005) e Antunes do Carmo (2013c), entre outros, a generalização do modelo de Serre a condições de água profunda só é assegurada com a melhoria das características dispersivas lineares do modelo original; por conseguinte, com α e β diferentes de zero, e com valores iguais aos usados acima e na bibliografia consultada ($\alpha \approx 0.13$ e $\beta = 0.20$). Os resultados da aplicação (A3) são particularmente reveladores das boas características dispersivas lineares do modelo, conseguidas com a introdução dos parâmetros α e β. Deve notar-se que não seria possível descrever a propagação de uma onda sinusoidal com as equações do modelo clássico de Serre num meio com as características da aplicação (A3), cuja solução é descrita pela teoria linear, como mostrado na Figura 6.

A generalização do modelo numérico a duas dimensões no plano horizontal (modelo 2DH) e para utilizações práticas em quaisquer meios (desde águas profundas, ao largo, até condições de águas pouco profundas) carece ainda de análises complementares, incluindo a adoção de um método numérico adequado para a resolução de ambos os sistemas de equações, capaz de propagar a mesma onda resolvendo o sistema de equações de Saint-Venant quando aplicado (água profunda, $h_0/L \geq 0.5$) e equações de tipo Serre em água pouco profunda ($h_0/L \leq 0.05$), e com transição entre ambos os sistemas em águas intermédias ($0.05 < h_0/L < 0.5$), por conseguinte, em função das características do meio. O desenvolvimento deste modelo está em curso, usando um método numérico implícito de elementos finitos baseado na técnica dos resíduos pesados de Galerkin.

Embora o método de diferenças finitas acima descrito possa ser igualmente usado para a resolução numérica das equações da versão bidimensional no plano horizontal [equações (7) expandidas], o uso de um método de elementos finitos tem a dupla vantagem de se adaptar melhor a geometrias irregulares e permitir o refinamento da malha em zonas de menor profundidade e/ou onde as velocidades são mais elevadas.

BIBLIOGRAFIA

Agnon Y., Madsen P.A. e Schaffer H. (1999). A new approach to high order Boussinesq models. *Journal of Fluid Mech.*, 399, 319-333.

Antunes do Carmo J.S. (2013a). Boussinesq and Serre type models with improved linear dispersion characteristics: Applications. *Journal of Hydraulic Research*, IAHR, Volume 51, Number 6, 719-727, doi: 10.1080/00221686.2013.814090.

Antunes do Carmo J.S. (2013b). Extended Serre equations for applications in intermediate water depths. *The Open Ocean Engineering Journal*, Bentham Science Publishers, USA, Volume 6, 16-25, doi: 10.2174/1874835X01306010016.

Antunes do Carmo J.S. (2013c). Applications of Serre and Boussinesq type models with improved linear dispersion characteristics. *Congress on Numerical Methods in Engineering*, Bilbao, Spain, 25-28 June. In (book) *Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería – CMN 2013*, 1552-1569, Jesús Mari Blanco, Irene Arias, Alberto Peña, José Miranda Guedes, Nuno Silvestre e Miguel Silva (Eds), International Center for Numerical Methods in Engineering (CIMNE), Barcelona, ISBN 978-84-941531-4-3.

Beji S. e Battjes J.A. (1993). Experimental investigations of wave propagation over a bar. *Coastal Engeenring.*, Vol. 19, No. (1,2), 151-162.

Beji S. e Nadaoka K. (1996). Formal derivation and numerical modelling of the improved Boussinesq equations for varying depth. *Ocean Engineering*, 23:691.

Berkhoff J.C.W., Booij N. e Radder A.C. (1982). Verification of numerical wave propagation models foe simple harmonic linear water waves. *Coastal Engineering*, Vol. 6, 255-279.

Booij N. (1983). A note on accuracy of the mild-slope equation. *Coastal Engineering*, Vol. 7, 91-203.

Boussinesq J. (1872). Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal. *Journal Math. Pure et Appl.*, 2(17) 55-108.

Cienfuegos R., Barthélémy E. e Bonneton P. (2006). A fourth-order compact finite volume scheme for fully nonlinear and weakly dispersive Boussinesq-type equations. Part I: Model development and analysis. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 51:1217-1253.

Dalrymple R.A. (1988). Model for refraction of water waves. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, ASCE, Vol. 114, No. 4, 423-435.

Dean R.G. e Dalrymple R.A. (1984). Water wave mechanics for engineers and scientists. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 07632. ISBN 0-13-946038-1.

Gobbi M.F.G., Kirby J.T. e Wei. G. (2000). A fully nonlinear Boussinesq model for surface waves. Part 2. Extension to $O(kh)^4$. *Journal of Fluid Mechanics*, 405, 181-210.

Kirby J.T. (1984). A note on linear surface wave-current interaction over slowly varying topography. *Journal of Geophys. Research*, Vol. 89, No. C, 745-747

Kirby J.T. e Dalrymple R.A. (1983). A parabolic equation for the combined refraction-diffraction of stokes waves by mildly varying topography. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 136, 435-466.

Liu Z.B. e Sun Z.C. (2005). Two sets of higher-order Boussinesq-type equations for water waves. *Ocean Engineering*, 32 1296-1310.

Lynett P. e Liu P.L.-F. (2002). Modeling Wave Generation, Evolution, and Interaction with Depth Integrated, Dispersive Wave Equations COULWAVE Code Manual. Cornell University Long and Intermediate Wave Modeling Package.

Madsen P.A. e Schaffer H.A. (1998). Higher order Boussinesq-type equations for surface gravity waves - Derivation and analysis. *Royal Society of London A*, 356, 1-60.

Madsen P.A. e Sørensen O.R. (1992). A New Form of the Boussineq Equations with Improved Linear Dispersion Characteristics: 2. A Slowly Varying Bathymetry. *Coastal Engineering*, 18:183.

Nwogu O. (1993). Alternative form of Boussinesq equations for nearshore wave propagation. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Eng.*, 119 618-638.

Peregrine D.H. (1967). Long waves on a beach. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 27, No. 4, 815-827.

Seabra-Santos F.J. (1985). Contribution a l'étude des ondes de gravité bidimensionnelles en eau peu profonde. Tese de doutoramento, Institut National Polytechnique de Grenoble, France, 338 p.

Seabra-Santos F.J. (1989). As aproximações de Wu e de Green & Naghdi no quadro geral da teoria da água pouco profunda. *Simpósio Luso-Brasileiro de Hidráulica e Recursos Hídricos* (4º SILUSBA), Lisboa, 14-16 de junho, 209-219.

Serre F. (1953). Contribution à l'étude des écoulements permanents et variables dans les canaux. *La Houille Blanche* 8, 374–388 & 830-872.

Wei G. e Kirby J T. (1995). A time-dependent numerical code for extended Boussinesq equations. *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, 121, 251-261.

Wei G., Kirby J.T., Grilli, S.T. e Subramanya R. (1995). A fully nonlinear Boussinesq model for surface waves. I. Highly nonlinear, unsteady waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 294, 71-92.