

RELEVÂNCIA DOS EFEITOS NÃO-LINEARES E DISPERSIVOS DAS ONDAS NOS PROCESSOS COSTEIROS

José S. ANTUNES DO CARMO¹

RESUMO

Os modelos numéricos são instrumentos úteis para estudar a propagação de ondas em meios com diferentes características, desde águas profundas (ao largo) até condições de água pouco profunda, e investigar a interação de ondas com batimetrias complexas ou estruturas construídas em regiões costeiras e estuarinas.

As capacidades de modelos do tipo Boussinesq e as equações Serre, ou de Green e Naghdi, para reproduzir os processos não-lineares de diversas interações são bem conhecidas. No entanto, estas aproximações clássicas restringem-se a condições de águas pouco profundas. Desde meados da década de 90 têm sido desenvolvidas formulações que modificam ou acrescentam termos de origem dispersiva, particularmente em aproximações do tipo Boussinesq.

Neste trabalho são apresentadas diferentes aproximações de equações que incluem características dispersivas melhoradas, permitindo aplicações em águas intermédias e até condições de águas profundas. Em particular, é apresentada uma formulação das equações clássicas de Serre com melhores características dispersivas lineares. São apresentadas aplicações e discutidas comparações de diferentes aproximações.

Por fim, é proposto um modelo morfodinâmico 1DH e são discutidos diferentes termos de transporte. Em particular, são avaliados e discutidos os termos de transporte induzidos pelo enviesamento (*skewness*) $\langle q_{sk} \rangle$ e pela assimetria da onda $\langle q_{sy} \rangle$. Estes termos são integrados no modelo original de Bailard, o qual contempla apenas os transportes por arrastamento $\langle q_{sl} \rangle$ e em suspensão $\langle q_{ss} \rangle$.

Paravras-chave: Equações de Serre; equações de Nwogu; equações de Wei e Kirby; efeitos não-lineares e dispersivos; morfodinâmica; aplicações.

¹ Professor Associado com Agregação, Universidade de Coimbra, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Departamento de Engenharia Civil, 3030-788 Coimbra, Portugal
Email: jsacarmo@dec.uc.pt, Tel.: 239 797 153

1. INTRODUÇÃO

Com o objetivo de melhorar as características dispersivas das equações de Boussinesq (Boussinesq, 1872, 1877), Madsen *et al.* (1991) e Madsen e Sørensen (1992) modificaram termos dispersivos e introduziram um parâmetro de ajuste na equação de conservação da quantidade de movimento do modelo original. Esta correção foi feita de modo que a relação de dispersão das equações linearizadas coincidissem com a aproximação de Padé de segunda ordem da relação de dispersão da onda linear de Stokes.

Seguindo uma metodologia semelhante, Beji e Nadaoka (1996) desenvolveram um método relativamente simples para obter idêntica extensão das equações de Boussinesq. Posteriormente, Liu e Sun (2005) melhoraram as características de dispersão e de empolamento linear nas equações de Beji e Nadaoka introduzindo dois parâmetros de ajuste. A não linearidade das equações foi ainda melhorada por Liu e Sun através da adição de termos de ordem superior. Uma segunda metodologia de extensão das equações de Boussinesq foi seguida por Nwogu (1993), usando uma velocidade horizontal a uma profundidade arbitrária, em vez da velocidade média em profundidade e igualmente com um parâmetro de ajuste, fazendo coincidir a relação de dispersão das equações linearizadas com a relação de dispersão da onda linear de Stokes.

Em vez de utilizarem a velocidade horizontal, a uma certa profundidade, outras extensões de equações do tipo Boussinesq foram feitas usando o potencial de velocidade sobre uma profundidade arbitrária, também com um ou mais parâmetros de ajuste. Usando esta metodologia, Wei *et al.* (1995) estenderam a aproximação de Nwogu para ondas fortemente não-lineares, desenvolvendo modelos que podem não só ser aplicados em condições de águas intermédias como também simular a propagação de ondas com elevados efeitos de interação não-linear. Em geral, estes modelos resolvem equações com propriedades de dispersão linear bastante rigorosas até $kh \approx 3$, sendo $k = 2\pi/l$ o número de onda. O sistema de equações obtido por Wei *et al.* (1995) foi por estes investigadores resolvido numericamente e, mais tarde, por Lynett e Liu (2002), dando origem ao modelo COULWAVE.

Uma vez que as equações Serre (Serre, 1953) já são totalmente não-lineares, todas as formulações do tipo Boussinesq desenvolvidas até ao presente, no contexto da teoria das ondas em água pouco profunda, não introduziram qualquer novidade para a melhoria do desempenho não-linear do modelo de Serre. No entanto, algumas melhorias foram alcançadas para aplicações em que os efeitos dispersivos são particularmente relevantes. Tal é o caso de ondas que se propagam sobre barras submersas, como mostrado em Beji e Battjes (1993). Quando uma onda progride na face frontal e sobre uma barra submersa, em condições de água muito pouco profunda, esta empola acumulando harmónicos que são libertados na face descendente, produzindo um padrão irregular na retaguarda. Nestas condições, as características dispersivas das equações do modelo original de Serre são manifestamente incapazes de reproduzir com precisão alguns fenómenos físicos relevantes, sendo o desempenho do modelo COULWAVE manifestamente melhor.

Mostra-se que uma extensão das equações originais de Serre, adotando a metodologia proposta por Liu e Sun (2005) permite obter resultados comparáveis com os do modelo COULWAVE. Por outro lado, mostra-se ainda que quando predominam os efeitos não-lineares, estes são melhor reproduzidos pelas equações do modelo *standard* de Serre. Por fim, são analisadas e discutidas as contribuições relativas de diferentes termos de transporte

na estimativa do caudal sólido e a conseqüente evolução do fundo móvel, em particular o termo de transporte induzido pela aceleração-assimetria da onda.

2. FORMULAÇÃO HIDRODINÂMICA

2.1 Equações de Serre, ou de Green e Naghdi

Em conformidade com a teoria das ondas em condições de água pouco profunda, obtém-se um modelo adequado para a reprodução dos fenómenos que ocorrem neste meio partindo das equações fundamentais da Mecânica dos Fluidos, em variáveis de Euler, relativas ao escoamento irrotacional e tridimensional de um líquido perfeito [equações de Euler, ou de Navier-Stokes com as hipóteses de incompressibilidade ($d\rho/dt = \text{div } \vec{v} = 0$), irrotacionalidade ($\text{rot } \vec{v} = 0$, ou seja, $u_z = w_x$; $v_z = w_y$; $v_x = u_y$) e líquido perfeito ($\mu = 0$)].

No que se segue definem-se os parâmetros adimensionais $\varepsilon = a/h_0$ e $\sigma = h_0/l$, em que a , h_0 e l representam uma amplitude, uma profundidade e um comprimento horizontal característicos, e consideram-se as equações e condições de fronteira devidamente adimensionalizadas. Após alguns desenvolvimentos matemáticos é possível obter, em segunda aproximação (ordem σ^2) e em variáveis médias segundo a vertical, as seguintes equações do movimento (Seabra-Santos, 1989):

$$\begin{aligned}
 &(\eta - \xi/\varepsilon)_t + [(1 + \varepsilon\eta - \xi)\mu]_x + [(1 + \varepsilon\eta - \xi)v]_y = 0 \\
 &u_t + \varepsilon uu_x + \varepsilon v u_y + \eta_x \\
 &\quad + \sigma^2 \{ [(2/3)(\varepsilon\eta - \xi)_x + (1/2)\xi_x]P + (1/3)(1 + \varepsilon\eta - \xi)P_x \} \\
 &\quad + \sigma^2 [\varepsilon\eta_x Q + (1/2)(1 + \varepsilon\eta - \xi)Q_x] + \sigma^4 = 0 \\
 &v_t + \varepsilon u v_x + \varepsilon v v_y + \eta_y \\
 &\quad + \sigma^2 \{ [(2/3)(\varepsilon\eta - \xi)_y + (1/2)\xi_y]P + (1/3)(1 + \varepsilon\eta - \xi)P_y \} \\
 &\quad + \sigma^2 [\varepsilon\eta_y Q + (1/2)(1 + \varepsilon\eta - \xi)Q_y] + \sigma^4 = 0 \\
 &P = (1 + \varepsilon\eta - \xi)(\varepsilon A^2 - \varepsilon u A_x - \varepsilon v A_y - A_t) \\
 &Q = w_t + \varepsilon u w_x + \varepsilon v w_y \\
 &w = (1/\varepsilon)\xi_t + u\xi_x + v\xi_y \\
 &A = u_x + v_y
 \end{aligned} \tag{1}$$

Em variáveis dimensionais, e com fundo fixo ($\xi_t = 0$), as equações de conservação da massa e da quantidade do movimento, em segunda aproximação, escrevem-se:

$$\begin{aligned}
 &h_t + (hu)_x + (hv)_y = 0 \\
 &u_t + uu_x + v u_y + g\eta_x \\
 &\quad + [(2/3)h_x + (1/2)\xi_x]P + (1/3)hP_x + h_x Q + (1/2)hQ_x = 0 \\
 &\bar{v}_t + \bar{u}\bar{v}_x + \bar{v}\bar{v}_y + g\eta_y \\
 &\quad + [(2/3)h_y + (1/2)\xi_y]P + (1/3)hP_y + h_y Q + (1/2)hQ_y = 0 \\
 &P = h(A^2 - uA_x - vA_y - A_t)
 \end{aligned} \tag{2}$$

$$Q = w_t + uw_x + vw_y$$

$$w = u\xi_x + v\xi_y$$

$$A = u_x + v_y$$

A uma dimensão no plano horizontal, e ainda com fundo fixo, o sistema de equações resultante escreve-se:

$$\begin{aligned} h_t + (uh)_x &= 0 \\ hu_t + hu u_x + gh\xi_x + [h^2(P/3 + Q/2)]_x + \xi_x h(P/2 + Q) &= 0 \\ P &= -h(u_{xt} + uu_{xx} - u_x^2) \\ Q &= \xi_x(u_t + uu_x) + \xi_{xx}u^2 \end{aligned} \quad (3)$$

As aproximações (2), a 2DH, ou (3), a 1DH, são conhecidas como equações de Serre (Serre, 1953), ou de Green & Naghdi (Green e Naghdi, 1976). Estas aproximações são totalmente não-lineares mas fracamente dispersivas. Como se demonstra em Antunes do Carmo (2013a,b), a incorporação de apenas dispersão fraca significa que o modelo não propaga a onda em condições de águas profundas, não reproduz corretamente os fenómenos em condições de águas intermédias e o mesmo poderá acontecer em certas condições de águas pouco profundas. Uma situação típica ocorre com a geração e acumulação de harmónicos de ordem superior na face frontal de uma barra longitudinal submersa, ou de um recife submerso com objetivos de proteção costeira, tipicamente localizados em condições de água muito pouco profunda. A consequente libertação destes harmónicos na retaguarda das estruturas submersas (sem rebentação da onda) não é corretamente reproduzida pelas equações do modelo original de Serre.

2.2 Aproximações com características dispersivas melhoradas

Os modelos clássicos do tipo Boussinesq apenas propagam corretamente ondas de baixa amplitude relativa, sendo esta limitação consistente com a hipótese fundamental das equações de Boussinesq (1872), as quais assumem que os efeitos dispersivos são da mesma ordem de grandeza dos efeitos não-lineares, ou seja, que $O(\varepsilon) = O(\sigma^2)$, com $\sigma \ll 1$ (hipótese fundamental da água pouco profunda). Esta limitação e a melhoria das características dispersivas foram em parte resolvidas por aproximações sucessivamente desenvolvidas por Nwogu (1993), Wei e Kirby (1995), Wei et al. (1995) e Gobbi (2000), entre outros.

2.2.1 Equações de Nwogu

Tal como para a dedução das equações de Serre (secção 2.1), partindo das equações fundamentais da Mecânica dos Fluidos, devidamente adimensionalizadas, e com condições de fronteira apropriadas, obtêm-se sucessivamente por integração da equação de continuidade, e tendo em conta a condição de irrotacionalidade:

$$\int_{-1+\xi}^z w_z dz = - \int_{-1+\xi}^z u_x dz \quad (4)$$

$$w|_z - w|_{-1+\zeta} = - \left(\int_{-1+\zeta}^z u dz \right)_x + u|_{-1+\zeta} \zeta_x - u|_z z_x \quad (5)$$

Com $\zeta_t = 0$ e usando a regra de Lebnitz obtém-se (6):

$$w = - \left(\int_{-1+\zeta}^z u dz \right)_x \quad (6)$$

Substituindo a equação (6) na condição de irrotacionalidade $u_z = \sigma^2 w_x$, conduz a:

$$u_z = \sigma^2 w_x = -\sigma^2 \left(\int_{-1+\zeta}^z u dz \right)_{xx} \quad (7)$$

Considerando em seguida uma expansão da velocidade $u(x, z, t)$ com $z = z_\alpha$ seguida de integração entre $-1+\zeta$ to z , obtém-se (8):

$$\int_{-1+\zeta}^z u dz = (z+1-\zeta)u_\alpha + \left[\frac{(z-z_\alpha)^2}{2} - \frac{(1-\zeta+z_\alpha)^2}{2} \right] u_z \Big|_{z=z_\alpha} + \left[\frac{(z-z_\alpha)^3}{6} + \frac{(1-\zeta+z_\alpha)^3}{6} \right] u_{zz} \Big|_{z=z_\alpha} + \dots \quad (8)$$

Substituindo (8) em (7) e derivando sucessivamente a equação resultante em ordem a z , obtém-se após substituição das sucessivas derivadas na expansão em série de Taylor:

$$u = u_\alpha - \sigma^2 \left\{ (z-z_\alpha) [(1-\zeta+z_\alpha)u_\alpha]_{xx} + \frac{(z-z_\alpha)^2}{2} (u_\alpha)_{xx} \right\} + O(\sigma^4) \quad (9)$$

Substituindo esta equação em (6), e ambas nas equações originais do movimento obtém-se após simples desenvolvimentos matemáticos, considerando uma profundidade arbitrária $z_\alpha = \alpha h_0$, com $-1 \leq \alpha \leq 0$ (Walkley, 1999):

$$u_{\alpha t} + u_\alpha u_{\alpha x} + g\eta_x + \alpha h_r [h_r (u_\alpha)_t]_{xx} + \frac{\alpha^2}{2} h_r^2 (u_\alpha)_{xxt} = 0 \quad (10)$$

$$\eta_t + [(h_r + \eta)u_\alpha]_x + \left[\left(\alpha + \frac{1}{2} \right) h_r^2 (h_r u_\alpha)_{xx} + \left(\frac{\alpha^2}{2} - \frac{1}{6} \right) h_r^3 (u_\alpha)_{xxx} \right]_x = 0 \quad (11)$$

ou ainda a duas dimensões no plano horizontal:

$$\eta_t + \nabla \cdot [(h_r + \eta)u_\alpha] + \nabla \cdot \left\{ \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) h_r^2 \nabla [\nabla \cdot (h_r u_\alpha)] + \left(\frac{\alpha^2}{2} - \frac{1}{6} \right) h_r^3 \nabla (\nabla \cdot u_\alpha) \right\} = 0 \quad (12)$$

$$\mathbf{u}_{\alpha t} + (\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla) \mathbf{u}_\alpha + g \nabla \eta + \alpha h_r \nabla [\nabla \cdot (h_r \mathbf{u}_{\alpha t})] + \frac{\alpha^2}{2} h_r^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_{\alpha t}) = 0 \quad (13)$$

com $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ e o vetor da velocidade $\mathbf{u}(x, y, t) = (u, v)$ representando as componentes horizontais da velocidade à profundidade $z = \alpha h$.

2.2.2 Equações de Wei e Kirby

Usando o potencial de velocidade a uma profundidade arbitrária, e também com um parâmetro de ajuste, Wei *et al.* (1995) derivaram um modelo de tipo Boussinesq, de quarta ordem, incluindo termos que não são considerados no sistema do Nwogu, até $O(\varepsilon\sigma^2)$; por conseguinte, melhoraram a não-linearidade das equações até $O(\varepsilon) = 1$. Em termos de variáveis adimensionais, o problema de valor de fronteira para o potencial de velocidade é dado por (14):

$$\begin{aligned} \varphi_{zz} + \mu^2 \nabla^2 \varphi &= 0, & -1 + \xi \leq z \leq \varepsilon \eta \\ \varphi_z + \mu^2 \nabla h_{1-\xi} \cdot \nabla \varphi &= 0, & z = -1 + \xi \\ \eta + \varphi_t + \frac{1}{2} \varepsilon \left[(\nabla \varphi)^2 + \frac{1}{\mu^2} (\varphi_z)^2 \right] &= 0, & z = \varepsilon \eta \\ \eta_t + \varepsilon \nabla \varphi \cdot \nabla \eta - \frac{1}{\mu^2} \varphi_z &= 0, & z = \varepsilon \eta \end{aligned} \quad (14)$$

em que z é a coordenada vertical, a partir do nível da superfície livre, adimensionalizada por uma profundidade característica h_0 , e η é a variação da superfície da água adimensionalizada por uma amplitude característica a . Os dois parâmetros adimensionais ε e μ^2 são definidos por $\varepsilon = a/h_0$ e $\mu^2 = (k_0 h_0)^2$, com o número de onda representativo $k = 2\pi/l$, isto é, $\mu^2 = (2\pi\sigma)^2$. O tempo t e o potencial φ são adimensionalizados por $[k_0 (gh_0)^{1/2}]^{-1}$ e $\varepsilon h_0 (gh_0)^{1/2}$, respetivamente.

Integrando a primeira das equações (14) na coluna de água, e usando as condições de fronteira apropriadas, obtém-se a equação de continuidade (15):

$$\eta_t + \nabla \cdot M = 0 \quad (15)$$

em que $M = \int_{-1+\xi}^{\varepsilon\eta} \nabla \varphi dz$. Retendo termos até $O(\mu^2)$, e denotando φ_α como o valor de φ em $z = z_\alpha(x, y)$, uma aproximação para o potencial de velocidade é dada por (16):

$$\varphi = \varphi_\alpha(x, t) + \mu^2 (z_\alpha - z) \nabla \cdot (h_{1-\xi} \nabla \varphi_\alpha) + \frac{\mu^2}{2} (z_\alpha^2 - z^2) \nabla^2 \varphi_\alpha + O(\mu^4) \quad (16)$$

Substituindo a equação (16) em (15) obtém-se a equação de conservação da massa (17) (Wei *et al.*, 1995):

$$\eta_t + \nabla \cdot \left\{ \left(h_{1-\xi} + \varepsilon\eta \right) \left\{ \nabla \varphi_\alpha + \mu^2 \left\{ \nabla \left[z_\alpha \nabla \cdot (h_{1-\xi} \nabla \varphi_\alpha) + \frac{z_\alpha^2}{2} \nabla^2 \varphi_\alpha \right] \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{(h_{1-\xi} - \varepsilon\eta)}{2} \nabla [\nabla \cdot (h_{1-\xi} \nabla \varphi_\alpha)] - \frac{[h_{1-\xi}^2 - \varepsilon\eta h_{1-\xi} + (\varepsilon\eta)^2]}{6} \nabla^2 \nabla \varphi_\alpha \right\} \right\} \right\} = 0 \quad (17)$$

De igual modo, substituindo (16) na terceira equação de (14), obtém-se uma equação de conservação da quantidade de movimento em termos do potencial de velocidade. Seguidamente, considerando $u_\alpha = \nabla \varphi_\alpha$ à profundidade $z = z_\alpha$, resulta a seguinte versão de equações do tipo Boussinesq, com não-linearidade melhorada, em termos de η e u_α :

$$\eta_t + \nabla \cdot \left\{ \left(h_{1-\xi} + \varepsilon\eta \right) \left\{ \mathbf{u}_\alpha + \mu^2 \left\{ \left[\frac{z_\alpha^2}{2} - \frac{1}{6} (h_{1-\xi}^2 - \varepsilon\eta h_{1-\xi} + (\varepsilon\eta)^2) \right] \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \left[z_\alpha + \frac{1}{2} (h_{1-\xi} - \varepsilon\eta) \right] \nabla [\nabla \cdot (h_{1-\xi} \mathbf{u}_\alpha)] \right\} \right\} \right\} = O(\mu^4) \quad (18)$$

$$\mathbf{u}_{\alpha t} + \varepsilon (\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla) \mathbf{u}_\alpha + \nabla \eta + \mu^2 \mathbf{R} + \varepsilon \mu^2 \mathbf{S} = O(\mu^4) \quad (19)$$

em que

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2} z_\alpha^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_{\alpha t}) + z_\alpha \nabla [\nabla \cdot (h_{1-\xi} \mathbf{u}_{\alpha t})] - \nabla \left[\frac{1}{2} (\varepsilon\eta)^2 \nabla \cdot \mathbf{u}_{\alpha t} + \varepsilon\eta \nabla \cdot (h_{1-\xi} \mathbf{u}_{\alpha t}) \right] \quad (20)$$

$$\mathbf{S} = \nabla \left\{ (z_\alpha - \varepsilon\eta) (\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla) [\nabla \cdot (h_{1-\xi} \mathbf{u}_\alpha)] + \frac{1}{2} [z_\alpha^2 - (\varepsilon\eta)^2] (\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla) (\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha) \right\} \\ + \frac{1}{2} \nabla \left\{ [\nabla \cdot (h_{1-\xi} \mathbf{u}_\alpha) + \varepsilon\eta \nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha]^2 \right\} \quad (21)$$

Deve notar-se que a aproximação de Nwogu é recuperada negligenciando termos de ordem superior. Um algoritmo numérico de previsão-correção de diferenças finitas, de ordem elevada, foi desenvolvido e é apresentado em Lynett e Liu (2002) para a resolução das equações de Wei e Kirby (18)-(19), considerando uma e duas camadas, dando origem ao modelo COULWAVE.

2.2.3 Equações de Serre expandidas

Mais recentemente, Antunes do Carmo (2013a,b) usou a metodologia de Liu e Sun (2005), com a introdução de dois parâmetros, α e β , para expandir as equações de Serre até $kh \approx 3$. Partindo do sistema de equações (3), a adição e subtração de termos de origem dispersiva, utilizando a aproximação $u_t = -g\eta_x$ e considerando os parâmetros α , β e γ , com $\beta = 1.5\alpha - 0.5\gamma$, permite obter um novo sistema de equações (22)-(23) com características de dispersão melhoradas:

$$h_t + (uh)_x = 0 \quad (22)$$

$$\begin{aligned}
& u_t + uu_x + g(h + \zeta)_x + (1 + \alpha)(\Omega u_t - hh_x u_{xt}) - (1 + \beta) \frac{h^2}{3} u_{xxt} \\
& + \alpha g \Omega (h + \zeta)_x - \alpha g h h_x (h + \zeta)_{xx} - \beta g \frac{h^2}{3} (h + \zeta)_{xxx} - hh_x uu_{xx} \\
& + \frac{h^2}{3} (u_x u_{xx} - uu_{xxx}) + h (u_x)^2 (h + \zeta)_x + \zeta_{xx} u^2 (h + \zeta)_x \\
& + (\Omega + h \zeta_{xx}) uu_x + \frac{h}{2} \zeta_{xxx} u^2 + \tau_b / (\rho h) = 0
\end{aligned} \tag{23}$$

em que $\Omega(x) = h_x \zeta_x + 0.5h \zeta_{xx} + (\zeta_x)^2$, $\beta = 0.20$ e $\alpha \approx 0.1308$. Deve notar-se que fazendo $\alpha = \beta = 0$ o sistema de equações de Serre (3) é recuperado.

O sistema de equações (22)-(23) é resolvido numericamente por um método implícito de diferenças finitas, do tipo previsão-correção, após agrupamento dos termos de origem dispersiva com derivadas em tempo da velocidade numa equação adicional. O sistema equivalente de três equações a três incógnitas (h , q e u) conduz à resolução de três sistemas tridiagonais em cada Δt para as variáveis h e u e a duas equações explícitas para a variável q (Antunes do Carmo, 2013a,b).

2.3 Aplicações comparativas

Foram comparados resultados do modelo numérico de Serre, que resolve as equações (22)-(23), com resultados do modelo COULWAVE, que resolve as equações (18)-(19), num exemplo particularmente revelador da importância relativa dos termos não-lineares.

Estão disponíveis na bibliografia dados experimentais de propagação de uma onda solitária sobre a batimetria mostrado na Figura 1 (Antunes do Carmo, 2013a,b). Esta figura mostra uma profundidade constante até $x = 55$ m e uma inclinação de 1:20 a partir desta secção e até $x = 75$ m. Na secção terminal, em $x = 75$ m, existe uma parede vertical impermeável que produz reflexão total da onda nesta fronteira. O domínio computacional foi uniformemente discretizado com um passo espacial $\Delta x = 0.05$ m. Considerou-se nulo o coeficiente de atrito. Foram usados os modelos numéricos de Serre melhorado e COULWAVE para a propagação de uma onda solitária com altura de 0.12 m inicialmente centrado em $x = 25$ m.

A Figura 2 compara séries temporais de elevação da superfície, obtidas por ambos os modelos, com dados experimentais obtidos numa sonda localizada em $x = 72.75$ m. Esta figura mostra dois picos, correspondendo o primeiro à onda incidente e o segundo à onda refletida.

As previsões do modelo de Serre melhorado (22)-(23) concordam muito satisfatoriamente com as medições em ambos os picos. Foram calculados os erros quadráticos médios (RMSE-root mean square error), tendo-se obtido para a altura da onda erros de 0.0090 m e de 0.0117 m para o primeiro e segundo picos, respetivamente. Relativamente à fase, há perdas pouco relevantes, de aproximadamente 0.05 s e 0.10 s em ambos os picos, respetivamente. Já os resultados do modelo COULWAVE de uma só camada, como se observa na Figura 2, são bastante menos satisfatórios, observando-se erros com algum significado na altura da onda refletida (de aproximadamente 0.0245 m), mas sobretudo na fase desta mesma onda (na ordem de 0.415 s).

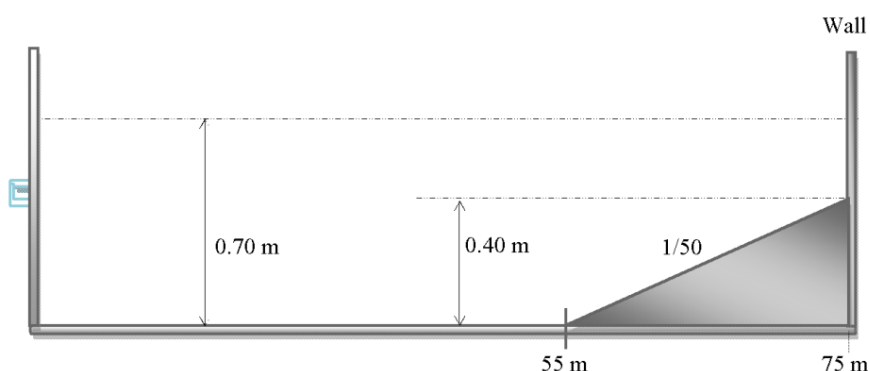


Figura 1. Batimetria sobre a qual é propagada uma onda solitária, com reflexão total numa parede vertical situada no extremo de uma rampa com inclinação de 2% (fora de escala) (adaptada de Antunes do Carmo, 2013a).

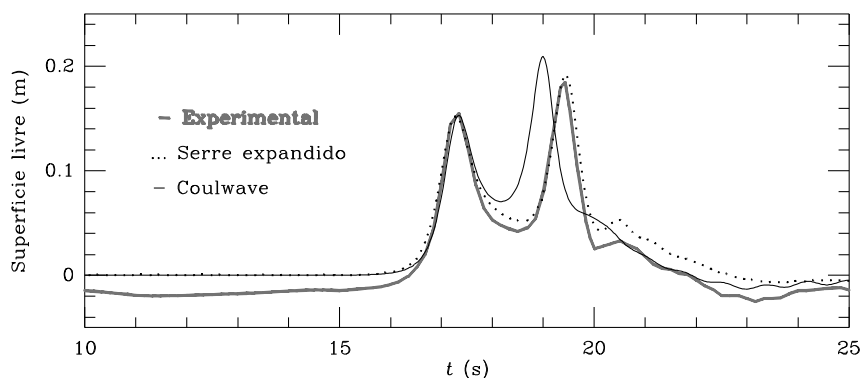


Figura 2. Propagação de uma onda solitária com reflexão total numa parede vertical situada no extremo oposto de uma rampa com inclinação de 2%. Elevação da superfície livre numa sonda localizada em $x = 72.75$ m. Experimental (—); Serre com características dispersivas melhoradas (···); Coulwave (—).

Estão igualmente disponíveis na literatura resultados experimentais para a propagação de uma onda sinusoidal com altura de 0.02 m, período de 2.02 s e comprimento de onda igual a 3.73 m, num meio com uma profundidade de 0.40 m na secção de entrada do domínio e uma barra no seu interior, como apresentado na Figura 3.

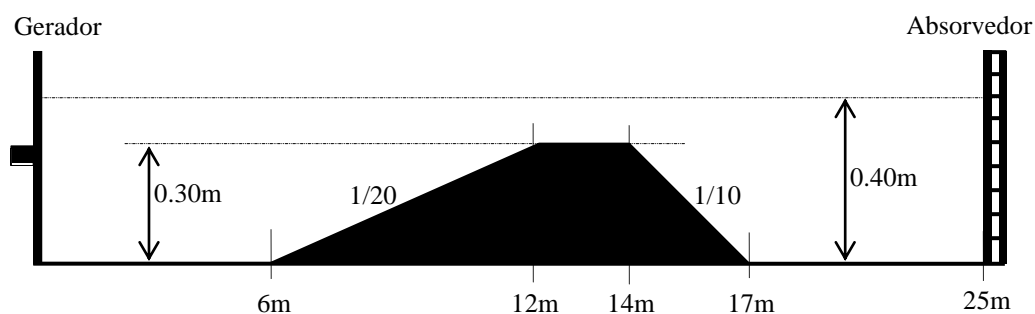


Figura 3. Batimetria para a propagação de uma onda sinusoidal, com altura de 0.02 m, período de 2.02 s e comprimento de onda de 3.73 m, sobre uma barra submersa.

A Figura 4 mostra uma comparação de resultados numéricos do modelo *standard* de Serre (3) com os resultados do modelo que resolve as equações melhoradas (22)-(23), considerando a fronteira de entrada em $x = 13.5$ m (dados experimentais obtidos em condições de água muito pouco profunda, com $h/l = 0.03$). A influência dos termos adicionais de origem dispersiva nas equações de Serre expandidas é claramente evidenciada na Figura 4, a qual mostra resultados obtidas numa sonda localizada na retaguarda da estrutura, em $x = 17.3$ m (ver Figura 3). Os resultados do modelo clássico de Serre (linha a tracejado) são claramente de menor qualidade.

Deve notar-se que esta aplicação também demonstra o bom comportamento do modelo numérico com características dispersivas melhoradas (22)-(23) para propagar um sinal complexo imposta na fronteira de entrada.

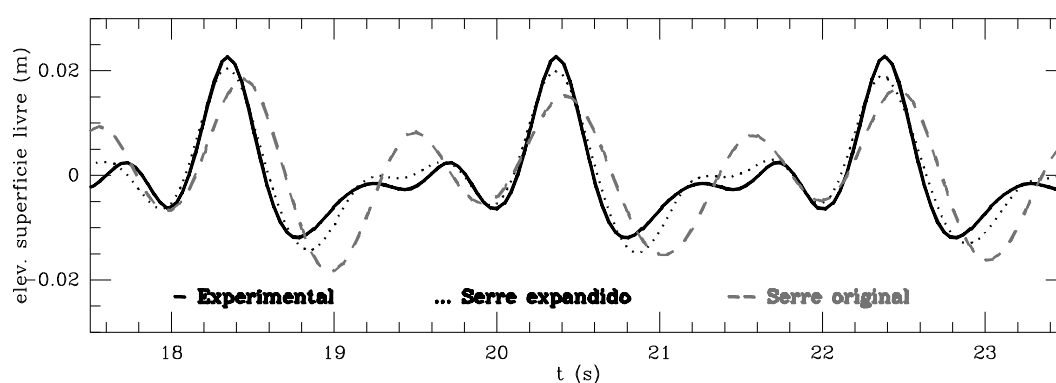


Figura 4. Propagação de uma onda sinusoidal (à entrada) num domínio contendo uma barra submersa. Comparação de dados experimentais (—), obtidos numa sonda localizada em $x = 17.3$ m, com resultados do modelo numérico de Serre melhorado (22)-(23) (···) e com resultados do modelo original de Serre (3) (- - -) (adaptada de Antunes do Carmo, 2013b).

3. FORMULAÇÃO MORFODINÂMICA

O modelo de Bailard (Bailard, 1981) não considera as contribuições do enviesamento (*skewness*) $\langle q_{sk} \rangle$ e da assimetria da onda $\langle q_{sy} \rangle$ induzidas no cálculo do caudal sólido total $\langle q_{st} \rangle$. Como sublinhado em Dubarbier *et al.* (2015), a generalidade dos modelos usados para estimar a evolução de perfis de praia são ineficientes no que concerne à simulação de formas de fundo e migração de bancos de areia. Segundo Hoefel e Elgar (2003) e Kuriyama (2012), tal pode ser atribuído à ausência do transporte induzido pela aceleração-assimetria da onda.

A importância relativa do termo de transporte devido à assimetria da onda é aqui analisada comparando com resultados do modelo de Bailard, que apenas inclui as parcelas $\langle q_{sx} \rangle$ e $\langle q_{sy} \rangle$. De notar que estes termos já incluem as influências de irregularidades/declives no fundo, ξ_x . Nesta contexto, propõe-se um modelo morfodinâmico composto pelas equações da hidrodinâmica (22)-(23) e pelas seguintes equações de continuidade (24) e da dinâmica (25), incorporando esta quatro processos de transporte sedimentar:

$$(1-p)\xi_t + \langle q_{st} \rangle_x = 0 \quad (24)$$

$$\langle q_{st} \rangle = \langle q_{sl} \rangle + \langle q_{ss} \rangle + \langle q_{sk} \rangle + \langle q_{sy} \rangle \quad (25)$$

em que

$$\begin{aligned} \langle q_{sl} \rangle &= \frac{c_{sl}}{g(s-1)} \frac{\varepsilon_a}{\tan\phi} \left(\langle |u|^2 u \rangle - \frac{1}{\tan\phi} \xi_x \langle |u|^3 \rangle \right), \\ \langle q_{ss} \rangle &= \frac{c_{ss}}{g(s-1)} \frac{\varepsilon_s}{w_s} \left(\langle |u|^3 u \rangle - \frac{\varepsilon_s}{w_s} \xi_x \langle |u|^5 \rangle \right), \\ \langle q_{sk} \rangle &= c_{sk} (T_p U_{orb}^2 A_{sk}) \text{ e } \langle q_{sy} \rangle = -c_{sy} (T_p U_{orb}^2 A_{asy}). \end{aligned}$$

Nas equações (24) e (25), $\langle \dots \rangle$ representam valores médios dos argumentos num período característico, q_{st} é o caudal total de sedimentos transportados, o qual é composto por um termo de transporte por arrastamento, q_{sl} , um termo de transporte em suspensão, q_{ss} , um termo de transporte induzido pela velocidade-enviesamento (*skewness*) da onda, q_{sk} , e um termo de transporte induzido pela aceleração-assimetria da onda, q_{sy} ; u é a velocidade da onda, p é a porosidade do sedimento, ϕ é o ângulo de atrito interno, $\varepsilon_a \in [0.10, 0.30]$ e $\varepsilon_s \in [0.010, 0.030]$ são coeficientes de eficiência, w_s é a velocidade de queda do sedimento, c_{sl} e c_{ss} são coeficientes globais de rugosidade, c_{sk} e c_{sy} são coeficientes de calibração; $U_{orb} = \pi H_{rms} / [T_p \sinh(kh)]$ é a amplitude da velocidade orbital, $A_{sk} = \langle u^3 \rangle / \langle u^2 \rangle^{3/2}$ é uma medida de enviesamento da velocidade orbital, e $A_{asy} = \langle \{ \mathcal{H}[u(t)] \}^3 \rangle / \langle (u)^2 \rangle^{3/2}$ é o coeficiente de assimetria da velocidade, em que $\mathcal{H}[u(t)]$ é a transformada de Hilbert de u . O coeficiente de assimetria é aqui aproximado por $A_{asy} = \langle a^3 \rangle / a_{rms}^3$, com $a_{rms} = \langle a^2 \rangle^{1/2}$, sendo $a = du/dt$ a aceleração média da onda em cada passo temporal Δt , ou seja, a uma dimensão no plano horizontal, segundo x , $a = \partial u / \partial t + u \partial u / \partial x = \Delta u / \Delta t + u \Delta u / \Delta x$.

Na realidade, todos os coeficientes de calibração, em particular as eficiências ($\varepsilon_a, \varepsilon_s$) e os coeficientes (c_{sk}, c_{sy}), resultam em consequência do nosso desconhecimento ou incapacidade para a compreensão dos processos, requerendo por isso uma calibração morfodinâmica específica para cada local. Uma vez devidamente calibrado, um modelo morfodinâmico 1DH, com a formulação acima proposta, poderá prever a dinâmica das barras litorais numa escala de tempos da ordem de dias (pelo menos) (Roelvink e Reniers, 2012).

Contudo, deve notar-se que esta calibração não é trivial, pois o modelo envolve um grande número de coeficientes, requerendo tipicamente um elevado número de cálculos e uma otimização de estratégias. Em primeira aproximação, os coeficientes c_{sk} e c_{sy} são da ordem de 10^{-5} a 5×10^{-5} , não sendo necessariamente iguais. Usar-se-á neste trabalho o valor $c_{sy} = 2 \times 10^{-5}$. No entanto, deve notar-se que os efeitos são em grande parte determinados

pelos valores dos coeficientes de calibração, os quais são normalmente mantidos constantes.

O transporte relacionado com o declive do fundo está incluído nos dois primeiros termos da equação (25), aumentando ou diminuindo o transporte de sedimentos consoante o declive é descendente ou ascendente, respetivamente.

A equação (24) é resolvida utilizando um esquema de Euler-WENO, como é apresentado em Long *et al.* (2008) e Antunes do Carmo (2014).

4. APLICAÇÕES E DISCUSSÃO

O modelo morfodinâmico proposto é seguidamente usado para calcular o transporte de sedimentos ao longo de um fundo horizontal contendo uma barra submersa, no primeiro caso, e uma fossa, na segunda aplicação, permitindo examinar as contribuições dos diferentes termos de transporte de sedimentos para a geração de formas de fundo, propagação/deformação de uma barra submersa e deformação/enchimento de uma fossa.

Seja a propagação de uma onda com as seguintes características: altura $H = 0.20$ m, período $T = 8$ s e comprimento de onda $l = 24.8$ m, à entrada de um canal com fundo horizontal (com $\xi = 0$) e profundidade (constante) $h = 1.0$ m nos primeiros 28.75 m. A partir deste ponto existe uma barra, tendo a face de montante um declive ascendente de 9.82% até atingir a cota máxima $\xi = 0.275$ m e mantida constante entre 31.55 m e 32.175 m. A barra decresce em seguida até $\xi = 0$, tendo a face de jusante um declive de 18.64%. Considera-se representativa do fundo uma granulometria com diâmetro mediano $d_{50} = 1.0$ mm, massa volúmica $\rho = 2000$ kg/m³ e ângulo de atrito interno $\phi = 37^\circ$.

A Figura 5 mostra a distribuição da velocidade no trecho compreendido entre 15 m e 45 m. As Figuras 6 e 7 mostram as configurações do fundo simuladas no trecho que inclui a barra, ou a fossa, entre os 17.5 m e os 42.5 m, após a entrada no domínio de 450 ondas, correspondendo a tempos de simulação de 60 minutos. Nestas figuras são consideradas: (1) a tracejado as contribuições dos dois primeiros termos da equação (25) (termos $\langle q_{sl} \rangle$ e $\langle q_{ss} \rangle$), e (2) a ponteadado as contribuições dos termos $\langle q_{sl} \rangle$, $\langle q_{ss} \rangle$ e $\langle q_{sy} \rangle$, ou seja, incluindo também o transporte induzido pela aceleração-assimetria da onda.

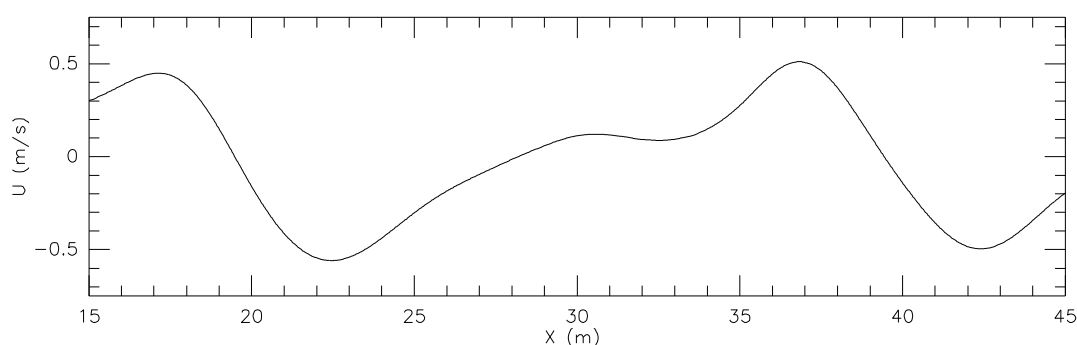


Figura 5. Distribuição inicial da velocidade ao longo do trecho compreendido entre 15 m e 45 m, sobre o fundo com uma barra submersa situada entre os 28.75 m e os 33.65 m.

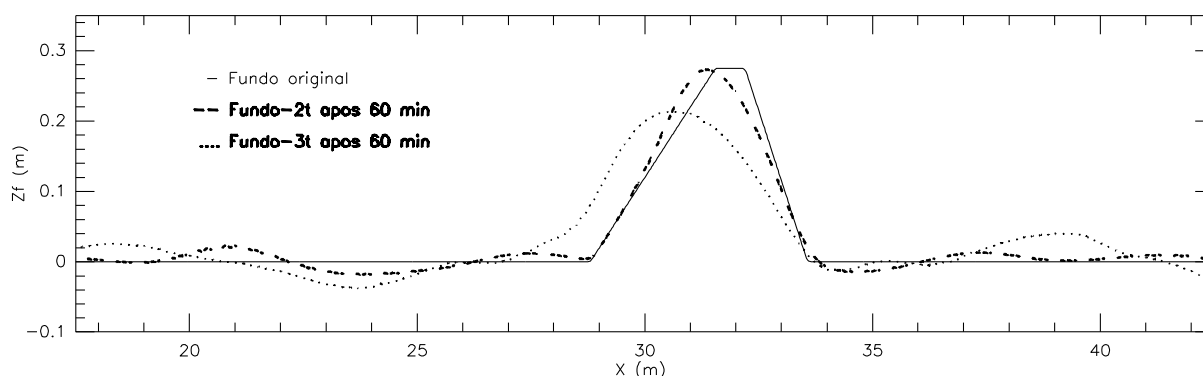


Figura 6. Configurações do fundo nas proximidades da barra submersa, após 60 minutos de simulação, considerando a tracejado apenas os termos $\langle q_{sl} \rangle$ e $\langle q_{ss} \rangle$ da equação (25), e a ponteados os três termos $\langle q_{sl} \rangle$, $\langle q_{ss} \rangle$ e $\langle q_{sy} \rangle$ da mesma equação.

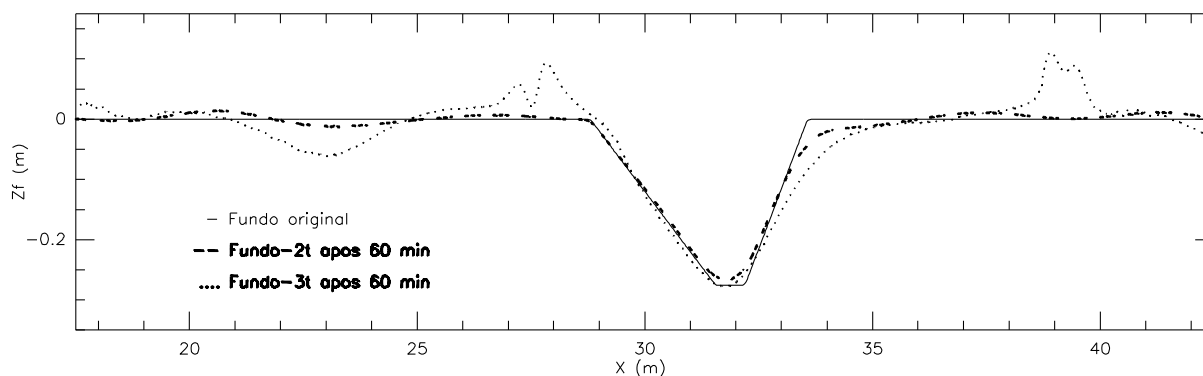


Figura 7. Configurações do fundo nas proximidades da fossa, após 60 minutos de simulação, considerando a tracejado apenas os termos $\langle q_{sl} \rangle$ e $\langle q_{ss} \rangle$ da equação (25), e a ponteados os três termos $\langle q_{sl} \rangle$, $\langle q_{ss} \rangle$ e $\langle q_{sy} \rangle$ da mesma equação.

Sabe-se que o termo $\langle |u|^2 u \rangle$ está associado com a assimetria e o enviesamento das ondas curtas nas zonas de empolamento e rebentação da onda. Será zero quando não existe assimetria da onda e resultará num transporte terrestre dirigido para a praia no caso de uma onda positiva enviesada. Consequentemente, uma onda assimétrica contribui para o transporte de sedimentos em direção à praia.

Observando a Figura 5, verifica-se que os efeitos de enviesamento e assimetria da onda simulada têm algum significado, pelo que será de esperar contribuições relativamente importantes destes termos de transporte para a evolução do fundo. Com efeito, como se observa nas Figuras 6 e 7, as quais não contemplam o transporte induzido pelo enviesamento (*skewness*) da onda, as configurações do fundo após 60 minutos de simulação diferem significativamente, notando-se uma maior tendência para a formação de formas/rugas mais pronunciadas por efeito de assimetria da onda, para além de evidentes diferenças de fase.

Em qualquer dos casos, relativamente ao fundo original, a barra tende a ficar com uma frente mais íngreme a montante e com um declive mais suave na face de jusante. Além disso, por efeito da assimetria da onda, nota-se um achatamento da barra, com redução acentuada da sua altura, contrariamente ao resultado sem a contribuição do transporte induzido pela assimetria.

Em relação ao fundo com fossa (Figura 7), as diferenças são ainda mais acentuadas; contudo, importa notar que se trata de resultados provisórios, carecendo de comprovação experimental, nomeadamente para calibração dos coeficientes.

Embora carecendo de comprovação experimental, as simulações efetuadas permitem concluir que os efeitos de enviesamento e assimetria da onda contribuem para aumentar o transporte de sedimentos na direção da praia. Tal é comprovado pela acumulação de sedimentos junto à fronteira de jusante, sendo este efeito mais evidente no fundo com fossa, entre os 45 m e os 50 m (efeito não mostrado nas Figuras 6 e 7).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Antunes do Carmo J.S. (2013a). Boussinesq and Serre type models with improved linear dispersion characteristics: Applications. *Journal of Hydraulic Research*, 51(6):719-727:814090. DOI: 10.1080/00221686.814090.

Antunes do Carmo J.S. (2013b). Extended Serre equations for applications in intermediate water depths. *The Open Ocean Engineering Journal*, 6:16-25.

Antunes do Carmo J.S. (2014). Shields diagram's extension for applications in steady non-uniform flows. *River Flow 2014 Conference*, September 3-5, Lausanne, Switzerland, in (ebook) *River Flow 2014 – Schleiss et al.* (Eds), 815-824, © 2014 Taylor & Francis Group, London, ISBN 978-1-138-02674-2.

Bailard J.A. (1981). An energetics total load sediment transport model for a plane sloping beach. *Journal of Geophysical Research* 86, Issue C11, 10938-10954, doi: 10.1029/JC086iC11p10938.

Beji S., Battjes J.A. (1993). Experimental investigations of wave propagation over a bar. . *Coastal Engineering*, 19(1,2):151-162.

Beji S., Nadaoka K. (1996). A formal derivation and numerical modelling of the improved Boussinesq equations for varying depth. *Ocean Engineering*, 23(8):691-704.

Boussinesq J. (1872). Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal. *Journal of Mathématiques Pures et Appliquées*, 2(17):55-108.

Boussinesq J. (1877). Essai sur la théorie des eaux courantes. Institute de France, Académie des Sciences, *Memoires présentées para divers savantes*, 23, 1.

Dubarbier B., Castelle B., Mariou V. e Ruessink G. (2015). Process-based modeling of cross-shore sandbar behavior. *Coastal Engineering*, 95 (2015) 35–50.

Gobbi M.F.G., Kirby J.T., Wei G. (2000). A fully nonlinear Boussinesq model for surface waves. Part 2. Extension to $O(kh)^4$. *Journal of Fluid Mechanics*, 405:181-210.

Green A.E., Naghdi P.M. (1976). A derivation of equations for wave propagation in water of variable depth. *Journal of Fluid Mechanics*, 78(2):237-246.

Hoefel F. e Elgar S. (2003). Wave-induced sediment transport and sandbar migration. *Science* 299, 1885–1886.

Kuriyama Y. (2012). Process-based one-dimensional model for cyclic longshore bar evolution. *Coastal Engineering*, 62, 48–61.

Liu Z.B., Sun Z.C. (2005). Two sets of higher-order Boussinesq-type equations for water waves. *Ocean Engineering*, 32:1296-1310.

Long, W., Kirby, J.T, Shao, Z. (2008). A numerical scheme for morphological bed level calculations, *Coastal Engineering*, 55, 167–180, doi: 10.1016/j.coastaleng.2007.09.009.

Lynett P., Liu P.L.F. (2002). Modeling Wave Generation, Evolution, and Interaction with Depth Integrated, Dispersive Wave Equations COULWAVE Code Manual. 1st ed. Ithaca, NY: Cornell University Long and Intermediate Wave Modeling Package.

Madsen, P.A., Sørensen, O.R. (1992). A New Form of the Boussinesq Equations with Improved Linear Dispersion Characteristics: 2. A Slowly Varying Bathymetry, *Coastal Engineering*, 18:183.

Madsen P.A., Murray R., Sørensen O.R. (1991). A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics. *Coastal Engineering*, 15(4):371-388.

Nwogu O. (1993). Alternative form of Boussinesq equations for nearshore wave propagation. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, 119:618-638.

Roelvink J.A. and Reniers A.J.H.M. (2012). *A Guide to Modeling Coastal Morphology (book)*, capítulo 7: Coastal Profile Models, *Advances in Coastal and Ocean Engineering*, World Scientific Publishing Co., 12, 169-178.

Seabra-Santos F.J. (1989). As aproximações de Wu e de Green & Naghdi no quadro geral da teoria da água pouco profunda, in: APRH, editor. Simpósio Luso-Brasileiro de Hidráulica e Recursos Hídricos (4º SILUSBA); 14-16 Junho; Lisboa, Portugal, LNEC, Lisboa, 209-219

Serre F. (1953). Contribution à l'étude des écoulements permanents et variables dans les canaux. *La Houille Blanche*, 8:374–388.

Walkley M.A. (1999). A Numerical Method for Extended Boussinesq Shallow-Water Wave Equations [thesis]. Leeds, UK: University of Leeds, School of Computer Studies.

Wei G., Kirby J.T. (1995). Time-dependent numerical code for extended Boussinesq equations. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, 121(5):251-261.

Wei G., Kirby J.T., Grilli S.T., Subramanya R. (1995). A fully nonlinear Boussinesq model for surface waves. I. Highly nonlinear, unsteady waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 294:71-92.