



7, 8 e 9
Março 2018
ÉVORA
Évora Hotel

GESTÃO DOS
RECURSOS HÍDRICOS:
NOVOS
DESAFIOS

DESCRIÇÃO DOS MOVIMENTOS DOS SEDIMENTOS EM SUSPENSÃO E POR ARRASTE PELA TEORIA DOS PROCESSOS ALEATÓRIOS

Geraldo, WILSON-JÚNIOR¹; Cid da Silva Garcia, MONTEIRO².

¹ Docteur d'Etat ès Sciences Physiques, Université Paris VI, Prof. da COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro-UFRJ, Centro Tecnologia, Bloco C, Sala C-209, Ilha do Fundão, CEP 21945-970. Rio de Janeiro, RJ. irwilson@gmail.com, Telefone: +55 21 99 737.8899

² Doutor em Ciências em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Pesquisador em Propriedade Industrial, INPI-Instituto Nacional de Propriedade Industrial, Rua Mayrink Veiga, 9, Centro, CEP 20090-910. Rio de Janeiro, RJ. csgm25@gmail.com, Telefones: +55 21 2273 5933; +55 21 98 865 6194

Resumo

Os movimentos dos sedimentos em escoamentos com superfície livre descrevem Processos Aleatórios cujos eventos elementares são as trajetórias dos grãos individuais. Os Movimentos por Arraste e em Suspensão são analisados pela mesma Teoria dos Processos Aleatórios, e são definidos por pares de funções de mobilidade: $\lambda_1(t, n)$ e $\lambda_2(x_i, m)$, dependentes do tempo e da distância percorrida numa direção particular Ox_i . Para a calibração e validação dos modelos são utilizados sedimentos marcados com radioisótopos. Estes permitem segui-los em suspensão e por arraste; registrar as trajetórias de um grão de areia em canal de laboratório; e de uma população, em canais, ribeirões, rios e estuários.

No caso do Movimento por Arraste, são propostas diferentes expressões analíticas de mobilidade do grão em função das características do leito, obtendo-se modelos: Poissonianos Homogêneos, Não Homogêneos e Não Poissonianos. No Movimento em Suspensão, as funções de mobilidade assumem valores constantes, e os modelos aleatórios resultantes se simplificam e se tornam Poissonianos Homogêneos.

Os Objetivos deste artigo são múltiplos: (i) aplicação dos modelos aleatórios 2D, longitudinais e verticais para descrever o movimento em suspensão de grãos de sedimentos de diferentes diâmetros; (ii) apresentação dos equipamentos e dispositivos experimentais que permitem registrar os movimentos de sedimentos coesivos e não coesivos, com transferências verticais; (iii) descrição das funções densidade de probabilidade das posições das partículas depositadas no fundo móvel; (iv) os tipos de comportamento do leito; e (v) descrição do movimento por arraste dos sedimentos depositados, em função do tempo.

Para o estudo dos Modelos Poissonianos **1D** foi elaborado o aplicativo **PAICON 1D** (Processos Aleatórios com Injeções Intantânea e Continua), que foi expandido para englobar o caso bidimensional: versão **PAICON-2D**.

Palavras-chave: Movimentos por arraste e em suspensão; Modelos Aleatórios 1D e 2D; Aplicativos PAICON- 1D e 2D; Deposição de Sedimentos.

Tema: Investigação em Hidráulica e Recursos Hídricos.

1. INTRODUÇÃO

Vários problemas de Engenharias Civil e Ambiental estão diretamente associados ao comportamento dos sedimentos em escoamentos com superfície livre. Estes são ao mesmo tempo: (i) arquivos preciosos graças aos quais os especialistas (historiadores, geólogos, geógrafos, antropólogos, etc...) lêem parte da História de nosso planeta; (ii) materiais básicos para a Construção Civil; (iii) constituintes móveis, sob a ação das correntes líquidas, eólicas, fluviais e marinhas, com os quais o Homem deve contar para proteção das Zonas Costeiras, Fluviais, Lacustres e das Obras Fluviais, Marítimas e Portuárias, e (iv) agentes de fixação de poluentes metálicos e orgânicos, de origens industrial, agrícola, nuclear, entre outros.

Assim sendo, a descrição do movimento de sedimentos nos escoamentos com superfície livre constitui um fator essencial para a solução de problemas hidráulicos e hidrológicos, tais como: exploração de bacias hidrográficas; projeto de estruturas hidráulicas; gestão de canais de navegação, de reservatórios de usinas hidrelétricas e de abastecimento de água; rejeitos industriais, extração de areia e agregados dos fundos dos rios, estuários e mares.

2. TIPOS DE MOVIMENTO DE SEDIMENTOS

O transporte e a dispersão dos sedimentos e dos poluentes fixados pelos grãos mais finos nos corpos de água ocorrem de três modos, conforme esquematizado na Figura 1.

2.1. Como uma suspensão de sedimentos coesivos

Neste caso, os grãos de sedimentos são transportados pela velocidade média do escoamento. Ao mesmo tempo são dispersos transversal e longitudinalmente sob a ação da difusão turbulenta, da advecção e da convecção diferenciais, devidas às variações espaciais de velocidades em torno do valor médio da seção. O efeito da gravidade não é sentido de modo representativo. Corresponde ao caso das suspensões do tipo *Wash-Load*.

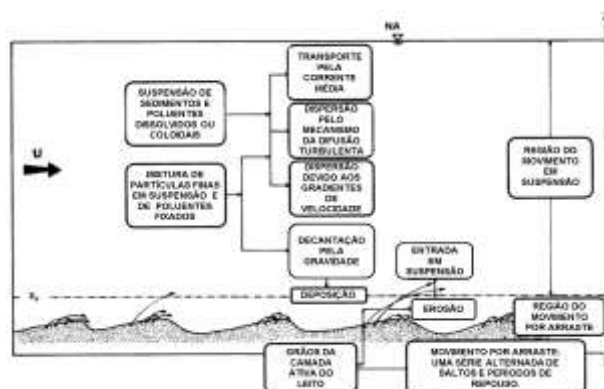


Figura 1. Movimento de sedimentos e poluentes em escoamentos com superfície livre (Wilson-Jr. 1987).

2.2. Como os grãos da camada superior móvel do leito

Estas partículas são transportadas por arraste de acordo com uma sequência alternada de deslocamentos – saltos, deslizamentos, rolamentos – e períodos de repouso. As taxas de transporte são inferiores aos valores do movimento, praticamente contínuo, da suspensão. Em repouso, o grão faz parte do leito, mas quando as variáveis hidrodinâmicas ultrapassam valores críticos, ele se destaca do fundo e desloca-se por arraste e/ou em suspensão.

2.3 Como uma suspensão de sedimentos finos não coesivos.

Entre os dois casos precedentes, existem classes de sedimentos: areias finas e siltes, que são transportados em suspensão pelo mesmo mecanismo dos sedimentos coesivos.

Entretanto, estes grãos decantam-se sob o efeito da gravidade e depositam-se sobre o leito, onde podem se comportar como o material da camada superior do leito, e serem novamente colocados em suspensão.

2.4 A importância do leito do escoamento.

Conclui-se que as descrições do comportamento do leito, incluindo as condições de movimento incipiente do material sólido, e os tipos de imersões de sedimentos e poluentes nos corpos d'água, devem ser conhecidas, assim como as características hidrodinâmicas do escoamento líquido. Se o fluido modela o leito do escoamento, ao mesmo tempo ele tem suas características hidrodinâmicas modificadas pelas formas que ele próprio modelou!

Os estudos do movimento do fluido e de transferência de massa devem ser realizados simultaneamente. Para partículas sólidas de mesma natureza, é de se esperar que os parâmetros que intervêm nos movimentos por arraste e em suspensão se relacionem entre si, pelo menos em sua fronteira comum: o leito do escoamento, o qual assume três papéis importantes: (i) Fonte de alimentação de grãos que se deslocam por arraste e/ou suspensão. (ii) Barreira de reflexão dos sedimentos em suspensão que o tocam sob o efeito da turbulência e da gravidade e retornam ao movimento em suspensão. (iii) Barreira de absorção para os sedimentos em suspensão que se depositam no fundo e se comportam como sedimentos da camada móvel do leito, movimentando-se por arraste ou permanecendo imóveis, em função de suas propriedades físico-químicas.

Nas experiências realizadas em canais de laboratório, os leitos foram de sedimentos não coesivos – areia natural de granulometria uniforme – submetidas a regimes hidrodinâmicos que geraram movimentos por arraste com configurações do tipo dunas e/ou rugas.

3. OBJETIVOS

Este trabalho dá sequência ao artigo apresentado no 13º SILUSBA, por Wilson-Jr. e Monteiro (2017). Contem tópicos propositadamente repetidos para tornar sua compreensão independente do primeiro trabalho. Seus propósitos gerais englobam o estudo das Descrições Lagrangeanas e Eulerianas dos movimentos em suspensão e por arraste de partículas de sedimentos e contaminantes, imersos instantânea e continuamente em escoamentos com superfície livre, com uso da Teoria dos Processos Aleatórios. A novidade do trabalho é o estudo do comportamento do leito em função dos tipos de sedimentos.

3.1 Objetivos Específicos

Particularmente, pretende-se:

(i) Apresentar os Modelos Poissonianos Bidimensionais dos movimentos longitudinais e verticais de sedimentos e contaminantes em suspensão. (ii) Destacar a importância das funções temporal e espacial de intensidade de mobilidade na definição dos modelos aleatórios, e na calibração e validação dos modelos 2D, com dados obtidos em canais de laboratório e na natureza. (iii) Aplicação dos modelos aleatórios bidimensionais (2D), longitudinais e verticais, para descrever o movimento em suspensão de grãos de sedimentos de diferentes diâmetros. (iv) Descrição dos dispositivos experimentais usados para registrar os movimentos de sedimentos com transferências verticais, incluindo o assoreamento e a erosão do leito.

4. DESENVOLVIMENTOS MATEMÁTICO E EXPERIMENTAL

4.1 Funções de Intensidade de Mobilidade dos Sedimentos e Poluentes

Para a descrição do movimento 1D das partículas de sedimentos e poluentes adotam-se: (i) a Descrição de Lagrange ou Espacial, que consiste da análise do processo aleatório $X_t = X_t(t, \omega)$, que caracteriza a evolução temporal da posição média de um grupo de partículas; e (ii) a Descrição de Euler ou Temporal, que consiste da análise do processo aleatório $T_x = T_x(x, \omega)$, que caracteriza o tempo médio de passagem do grupo de partículas através de seções transversais ao escoamento.

Todorović et al. (1966) mostraram que esses processos podem ser definidos em função das probabilidades de ocorrência de dois outros processos aleatórios $G_n^{0,x}$ e $E_n^{0,t}$, que se originam dos mesmos eventos elementares ω : as trajetórias dos grãos de sedimentos.

$$G_n^{0,x} = \{ \mu_{0,x} = n \} \quad (1)$$

$$E_n^{0,t} = \{ \eta_{0,t} = n \} \quad (2)$$

correspondem aos números de deslocamentos de uma ou mais partículas realizados na distância $[0, x]$, e no intervalo de tempo $[0, t]$, respectivamente.

As Funções de Distribuição $F_t(x)$ e $Q_x(t)$, que descrevem os processos $X_t = X_t(t, \omega)$ e $T_x = T_x(x, \omega)$, se relacionam por meio da Equação de Todorović (Todorović et al. 1966):

$$F_t(x) = 1 - \{ Q_x(t) = P [T_x(x, \omega) \leq t] \} \quad (3)$$

que são determinadas pelas Funções Aproximativas $F_{t1}(x, \omega)$, $F_{t2}(x, \omega)$, e $Q_{x2}(t, \omega)$, $Q_{x1}(t, \omega)$, que se expressam em função das probabilidades de ocorrência dos conjuntos $G_n^{0,x}$ e $E_n^{0,t}$. As equações aproximativas $F_{t1}(x, \omega)$ e $F_{t2}(x, \omega)$ do Processo Lagrangeano são definidas por:

$$0 \leq F_{t1}(x) \leq \{ F_t(x) = P [X_t = X_t(t, \omega)] \} \leq F_{t2}(x) \leq 1 \quad (4)$$

$$\begin{cases} F_{t1}(x) = e^{-\lambda_1 t - \lambda_2 x} \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{n=v+1}^{\infty} \frac{(\lambda_1 t)^v}{v!} \frac{(\lambda_2 x)^n}{n!} \\ F_{t2}(x) = e^{-\lambda_1 t - \lambda_2 x} \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{n=v}^{\infty} \frac{(\lambda_1 t)^v}{v!} \frac{(\lambda_2 x)^n}{n!} \end{cases} \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P [G_1^{x, x+\Delta x} | G_k^{0,x}] = \lambda_2(x, k) \Delta x + \vartheta(\Delta x) \\ P [G_i^{x, x+\Delta x} | G_k^{0,x}] = \vartheta(\Delta x) \quad i \geq 2 \\ P [G_0^{x, x+\Delta x} | G_k^{0,x}] = 1 - \lambda_2(x, k) \Delta x + \vartheta(\Delta x) \\ P [G_0^{0,0}] = 1 \end{array} \right\} \Delta x \rightarrow 0 \quad (6)$$

O sistema (6) define as propriedades do Processo de Markov $G_n^{0,x}$, onde $\vartheta(\Delta x)$ é um infinitésimo de primeira ordem. As probabilidades de ocorrência de $P \{ G_n^{0,x} \}$ são soluções das equações de derivadas parciais obtidas de suas propriedades acima (Equações 7 e 8). Equações semelhantes são obtidas para $Q_{x2}(t, \omega)$ e $Q_{x1}(t, \omega)$, do Processo Euleriano $T_x(x, \omega)$.

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} P[G_k^{0,x}] = \lambda_2(x, k-1) P[G_{k-1}^{0,x}] - \lambda_2(x, k) P[G_k^{0,x}] \\ \frac{\partial}{\partial x} P[G_0^{0,x}] = -\lambda_2(x, 0) P[G_0^{0,x}] \end{cases} \quad (7)$$

$$x=0 \quad \begin{cases} P[G_0^{0,x}] = 1 \\ P[G_k^{0,x}] = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Destas propriedades e equações surgem as Funções de Intensidade de Mudança do Estado Cinemático da(s) partícula(s): $\lambda_1(t, n)$ e $\lambda_2(x_i, n)$, que exprimem sua(s) mobilidades no tempo e no espaço, respectivamente. As expressões analíticas são obtidas do sistema de equações (6) elaborado para $\{G_n^{0,x}\}$ e de um sistema semelhante para $\{E_n^{0,t}\}$. Considerando-se as duas direções dos eixos ortogonais O_{xi} , $i=1, 3$ (longitudinal e vertical), dois pares de Funções de Mobilidade $\lambda_{1i}(t, n)$ e $\lambda_{2i}(x_i, n)$ são obtidos, os quais descrevem os movimentos 2D dos grãos de sedimentos, no tempo e no espaço. Em cada direção O_{xi} , $i=1, 3$, tem-se:

$$\begin{cases} \lambda_{1i}(t, n) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P\{E_{li}^{t,t+\Delta t} | E_{ni}^{0,t}\}}{\Delta t} \\ \lambda_{2i}(x_i, n) = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{P\{G_{li}^{x_i, x_i+\Delta x_i} | G_{ni}^{0,x_i}\}}{\Delta x_i} \end{cases} \quad (9)$$

Na prática, estas funções são obtidas de ensaios realizados com grãos de sedimentos marcados com radioisótopos, em **movimentos por arraste** ou **em suspensão**.

Em ensaios realizados em canais de laboratório com radioisótopos, Yang e Sayre (1971) concluíram que os comprimentos dos saltos e os períodos de repouso de grãos arenosos são descritos por funções de probabilidade gama e exponencial, respectivamente. Entretanto, no Brasil, Wilson-Jr (1987); Vukmirović (1975); Vukmirović e Wilson-Jr. (1976, 1977), utilizando dispositivos mais precisos de medições (Figuras 2 e 3), mostraram que tanto os comprimentos dos saltos, quanto os períodos de repouso, ajustam-se melhor a funções densidade de probabilidade gama. Posteriormente, estes autores estenderam os estudos para casos de mobilidades dependentes: (i) do tempo e do espaço $\lambda_1(t)$ e $\lambda_2(x_i)$; e (ii) dos números de deslocamentos no tempo (n) e no espaço (m): $\lambda_1(t, n)$ e $\lambda_2(x_i, m)$.

Wilson-Jr. (1987, 2012) classificou os modelos aleatórios de acordo com suas funções de mobilidade em: Modelos Poissonianos Homogêneos (mobilidades constantes), Não-Homogêneos e Não Poissonianos, os quais estão indicados nas Figuras 4 e 5, para os **movimentos por arraste e em suspensão**.

Wilson-Jr. (1987) comprovou que os Modelos Poissonianos Homogêneos descrevem com exatidão o movimento longitudinal de uma suspensão de poluentes líquidos e/ou de sedimentos finos em cursos d'água.



Figura 2. Ensaios com grãos isolados e grupos de partículas (Wilson-Jr. 1987)

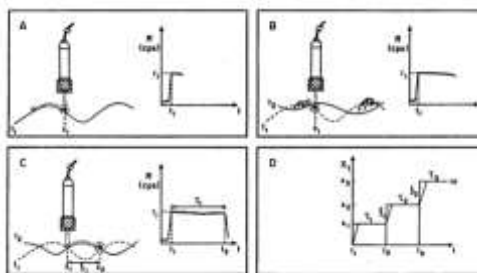


Figura 3. Deteções dos movimentos de um grão isolado e do grupo de partículas (Wilson-Jr. 1987)



Figura 4. Modelos Aleatórios do Movimento por Arraste (Wilson-Jr. 1987)

| $\lambda_1(t, n)$ | $\lambda_2(x, m)$ | Autores | Data | Movimento | Modelos |
|--|----------------------------------|-------------------------|----------|---------------------|-----------------------------|
| $\lambda_1 = \text{Cte}$ | $\lambda_2 = \text{Cte}$ | Einstein | 1937 | Arraste | Poissonianos Homogêneos |
| | | Sayre e Hubbell | 1965 | Arraste | |
| | | Todorović e Vukmirović | 1966 | Arraste | |
| | | Paintal | 1971 | Arraste | |
| | | Todorović, Simmons, Li | 1978 | Suspensão | |
| | | Itano | 1980 | Arraste | |
| | | Wilson-Jr. | 1987 | Arraste e Suspensão | |
| | | Mendes e Wilson-Jr. | 1995 | Suspensão | |
| | | Monteiro e Wilson-Jr. | 2005 | Suspensão | |
| | | Wilson-Jr. | 2007 | Arraste e Suspensão | |
| $\lambda_1(t)$ | $\lambda_2(x)$ | Shen e Todorović | 1971 | Arraste | Poissonianos Não Homogêneos |
| | | Frickmann e Wilson-Jr. | 1986 | Arraste | |
| | | Sayre e Yang | 1988 | Arraste | |
| | | Grigg | 1971 | Arraste | |
| $\lambda_1(x, t_1)$ $\lambda_2(x, t_2)$ $r_1 > 0, \text{Cte}$ $r_2 > 0, \text{Cte}$ | $\lambda_2(t)$ $\lambda_3(m)$ | Wilson-Jr. | 1972 | Arraste | Não Poissonianos |
| | | Vukmirović e Wilson-Jr. | 1975, 77 | Arraste | |
| $7 \lambda_1(t)$ $7 \lambda_2(x)$ | $7 \lambda_2(x)$ | Hung e Shen | 1978 | Arraste | Funções de Causalidade |
| | | Cheong e Shen | 1983 | Arraste | |
| $\lambda_1(t)$ $\lambda_2(n)$ | $\lambda_2(t)$ $\lambda_3(m)$ | Vukmirović e Wilson-Jr. | 1985, 87 | Arraste | Não Poissonianos |

Figura 5. Modelos resultantes das expressões de $\lambda_1(t, n)$ e $\lambda_2(x, m)$ (Wilson-Jr. 2012)

Com o uso do dispositivo apresentado na Figura 6, Wilson-Jr. (1987) ampliou os estudos para a análise do movimento de sedimentos em suspensão e por arraste, com **transferências verticais**. Obteve-se assim uma coleção de dados originais que para o estudo dos movimentos aleatórios 1D e 2D de sedimentos, coesivos e não coesivos. Finalmente, pôde-se analisar a evolução de um grupo de partículas que se move num período de tempo, por arraste no leito móvel de um rio e num outro período em suspensão, no meio da fase líquida; e suas transferências verticais.



Figura 6. Estudo simultâneo dos movimentos por arraste e em suspensão (Wilson-Jr. 1987).

4.2 Processos Aleatórios 2-D Lagrangeanos Poissonianos Homogêneos

As Funções de Mobilidade dos grãos, na direção i e no instante t : λ_{1i} e λ_{2i} , $i = 1, 3$ definidas pela Equação 9 surgem do desenvolvimento dos Processos Aleatórios $X_{ti}(\omega)$ e $T_{xi}(\omega)$. Modelos são obtidos das equações analíticas que definem essas mobilidades.

Elas consideram as propriedades físico-químicas dos sedimentos e/ou dos contaminantes, assim como as características hidrodinâmicas do escoamento. As expressões gerais de λ_{1i} e λ_{2i} , $i = 1, 3$, obtidas por Vukmirovic' (1975) e Wilson-Jr. (1987, 2012) a partir do movimento por arraste de grãos isolados de sedimentos marcados com radioisótopos, consideram a mobilidade das partículas em função do tempo, da distância percorrida numa direção, e dos números de deslocamentos no tempo (n) e na distância (m), em cada direção (i):

$$\begin{cases} \lambda_{1i}(t, n) = \lambda_{1i}(t) \lambda_{2i}(n) \\ \lambda_{2i}(x, m) = \lambda_{2i}(x) \lambda_{2i}(m) \end{cases} \quad i = 1, 3 \quad (10)$$

onde: λ_{1i} e λ_{2i} são os fatores de mobilidade da partícula num dado instante t , e numa posição x_i , $i = 1, 3$, respectivamente. Esses autores mostraram que para **o movimento em suspensão**, as funções de mobilidade assumem valores constantes, e consequentemente, os Modelos Aleatórios 1D e 2D resultantes, são Poissonianos Homogêneos. Têm-se:

$$\begin{cases} \lambda_{1i}(t, n) = \lambda_{1i} = \text{cte} \\ \lambda_{2i}(x, m) = \lambda_{2i} = \text{cte} \end{cases} \quad i = 1, 3 \quad (11)$$

o que significa que a probabilidade de deslocamento dos grãos, nos intervalos $[t, t+\Delta t]$ e $[x, x+\Delta x]$, Δt e Δx tendendo para zero, são independentes do tempo, da posição da partícula e dos deslocamentos anteriores. Neste caso, diz-se que a partícula não tem memória.

As Funções Densidade de Probabilidade da posição das partículas no tempo t se simplificam e são dadas pelas Equações (12), (13) e (14).

$$f_t(x, z) = \frac{\partial^2 F_t(x, z)}{\partial x \partial z} = f_t(x) f_t(z) \quad (12)$$

$$0.0 \leq f_{t1}(x_i) \leq f_t(x_i) \leq f_{t2}(x_i) \leq 1.0 \quad i = 1, 3 \quad (13)$$

$$\begin{cases} f_{t1}(x_i) = \lambda_{2i} e^{-\lambda_{1i}t - \lambda_{2i}x_i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_{1i}t)^k}{k!} \frac{(\lambda_{2i}x_i)^k}{k!} \\ f_{t2}(x_i) = \lambda_{2i} e^{-\lambda_{1i}t - \lambda_{2i}x_i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_{1i}t)^{k+1}}{(k+1)!} \frac{(\lambda_{2i}x_i)^k}{k!} \end{cases} \quad (14)$$

Wilson-Jr. (1987); Monteiro (2004); Wilson-Jr. e Monteiro (2017) têm-se dedicado ao desenvolvimento e aplicações de Modelos Poissonianos 1D Homogêneos e Não-Homogêneos em: canais de laboratório (Figuras 2 e 6), córregos e ribeirões (Figura 7) e em rios (Figura 8), com traçadores fluorescentes e radioativos, simulando partículas de poluentes líquidos e sedimentos, respectivamente. Para as análises unidimensionais dos dados, (Monteiro e Wilson-Jr. 2001) elaboraram o aplicativo **PAICON-1D** (Processos Aleatórios com Injeção Instantânea e **CONT**ínua). Para a análise bidimensional, através da versão **PAICON-2D**, as aproximações inferior e superior das funções densidade de probabilidade $f_{ij}(x, z)$, $j = 1, 2$; e de suas características estatísticas são substituídas pelas expressões de seus valores médios, como apresentado a seguir.

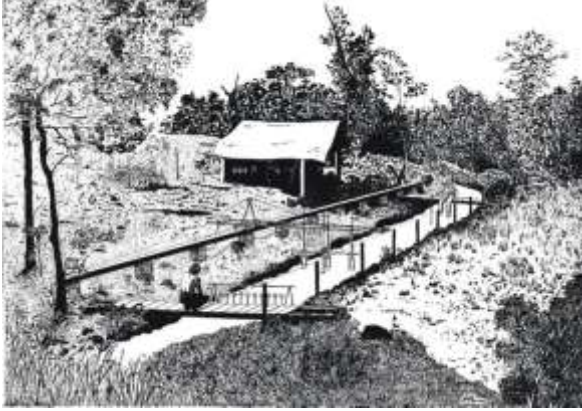


Figura 7. Ensaio realizado em ribeirão com sedimentos marcados com radioisótopos.
(Wilson-Jr. 1987)



Figura 8. Tempo de trânsito da Rodamina-B através de seções do Rio Loire, França.
(Wilson-Jr. 1987; Monteiro 2004)

4.3 Propriedades Estatísticas dos Modelos Poissonianos Homogêneos 2-D

Caso da Imersão Instantânea:

Função densidade de probabilidade média $f_{tm}(x, z)$

$$f_{t1}(x, z) \leq [f_t(x, z) = f_t(x) f_t(z)] \leq f_{t2}(x, z) \quad (15)$$

$$f_t(x, z) \cong f_{tm}(x, z) \cong \frac{1}{2} [f_{t1}(x, z) + f_{t2}(x, z)] \quad (16)$$

$$\begin{cases} f_{t1}(x, z) = \lambda_{21} \lambda_{23} e^{-\lambda_{11}t - \lambda_{21}x} e^{-\lambda_{13}t - \lambda_{23}z} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_{11}t)^n}{n!} \frac{(\lambda_{21}x)^n}{n!} \frac{(\lambda_{13}t)^k}{k!} \frac{(\lambda_{23}z)^k}{k!} \\ f_{t2}(x, z) = \lambda_{21} \lambda_{23} e^{-\lambda_{11}t - \lambda_{21}x} e^{-\lambda_{13}t - \lambda_{23}z} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_{11}t)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{(\lambda_{21}x)^n}{n!} \frac{(\lambda_{13}t)^{k+1}}{(k+1)!} \frac{(\lambda_{23}z)^k}{k!} \end{cases} \quad (17)$$

Função de distribuição de probabilidade média: $F_{tm}(x, z)$

$$F_{t1}(x, z) \leq \left\{ F_t(x, z) \cong F_{tm}(x, z) \cong \frac{1}{2} [F_{t1}(x, z) + F_{t2}(x, z)] \right\} \leq F_{t2}(x, z) \quad (18)$$

$$\begin{cases} F_{t1}(x, z) = e^{-\lambda_{11}t - \lambda_{21}x} e^{-\lambda_{13}t - \lambda_{23}z} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\lambda_{11}t)^n}{n!} \frac{(\lambda_{21}x)^k}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=m}^{\infty} \frac{(\lambda_{13}t)^m}{m!} \frac{(\lambda_{23}z)^p}{p!} \\ F_{t2}(x, z) = e^{-\lambda_{11}t - \lambda_{21}x} e^{-\lambda_{13}t - \lambda_{23}z} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\lambda_{11}t)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{(\lambda_{21}x)^k}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=m}^{\infty} \frac{(\lambda_{13}t)^{m+1}}{(m+1)!} \frac{(\lambda_{23}z)^p}{p!} \end{cases} \quad (19)$$

Posição média das partículas $M_{tm}(x, z)$

$$M_{t1}(x, z)_{Inst} \leq \left\{ [M_t(x, z)_{Inst}] \cong [M_{tm}(x, z)_{Inst}] \cong \frac{1}{2} [M_{t1}(x, z)_{Inst} + M_{t2}(x, z)_{Inst}] \right\} \leq M_{t2}(x, z)_{Inst} \quad (20)$$

$$\begin{cases} [M_{t1}(x, z)_{Inst}] = E[F_{t1}(x, z)] = \frac{1}{2\lambda_{21}\lambda_{23}} [2\lambda_{11}\lambda_{13}t^2 + (\lambda_{11} + \lambda_{13})t + 1] \\ [M_{t2}(x, z)_{Inst}] = E[F_{t2}(x, z)] = \frac{\lambda_{11}\lambda_{13}}{\lambda_{21}\lambda_{23}} t^2 \end{cases} \quad (21)$$

Variância da posição média das partículas: $[S_t^2(x, z)]_{Inst}$

$$\left[S_{t1}^2(x, z) \right]_{\text{Inst}} \leq \left\{ \left[S_t^2(x, z) \right]_{\text{Inst}} \equiv \left[S_{tm}^2(x, z) \right]_{\text{Inst}} \equiv \frac{1}{2} \left[\left[S_{t1}^2(x, z) \right]_{\text{Inst}} + \left[S_{t2}^2(x, z) \right]_{\text{Inst}} \right] \right\} \leq \left[S_{t2}^2(x, z) \right]_{\text{Inst}} \quad (22)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \left[S_{t1}^2(x, z) \right]_{\text{Inst}} &= \frac{2\lambda_{11}\lambda_{13}(\lambda_{11}+\lambda_{13})t^3 + [(\lambda_{11}+\lambda_{13})^2 + 10\lambda_{11}\lambda_{13}]t^2 + 6(\lambda_{11}+\lambda_{13})t + 3}{(\lambda_{21})^2 (\lambda_{23})^2} \\ \left[S_{t2}^2(x, z) \right]_{\text{Inst}} &= \frac{2\lambda_{11}\lambda_{13}(\lambda_{11}+\lambda_{13})t^3 + 2\lambda_{11}\lambda_{13}t^2}{(\lambda_{21})^2 (\lambda_{23})^2} \end{aligned} \right. \quad (23)$$

Caso da Imersão Contínua:

Trata-se de uma imersão uniforme, à taxa constante, durante um intervalo de tempo $[0, t_d]$. Os sedimentos e contaminantes são distribuídos lateralmente na superfície livre, numa seção situada a montante do canal (Figura 6). Nas equações, $t \geq t_d$ representa o instante da passagem dos traçadores pelas seções de amostragem, a jusante da seção de imersão.

Função densidade de probabilidade média $h_{tm}(x, z)$

$$h_{t1}(x, z) \leq \left\{ \left[h_t(x, z) = \frac{1}{t_d} \int_0^{t_d} f_{t-\tau}(x) f_{t-\tau}(z) d\tau \right] \equiv h_{tm}(x, z) \equiv \frac{1}{2} [h_{t1}(x, z) + h_{t2}(x, z)] \right\} \leq h_{t2}(x, z) \quad (24)$$

$$\left\{ \begin{aligned} h_{t1}(x, z) &= \frac{1}{t_d} \lambda_{21} \lambda_{23} \int_0^{t_d} e^{-\lambda_{21}x - \lambda_{23}z} e^{-(\lambda_{11}+\lambda_{13})(t-\tau)} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\lambda_{11}(t-\tau)]^n}{n!} \frac{(\lambda_{21}x)^n}{n!} \right\} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\lambda_{13}(t-\tau)]^n}{n!} \frac{(\lambda_{23}z)^n}{n!} \right\} d\tau \\ h_{t2}(x, z) &= \frac{1}{t_d} \lambda_{21} \lambda_{23} \int_0^{t_d} e^{-\lambda_{21}x - \lambda_{23}z} e^{-(\lambda_{11}+\lambda_{13})(t-\tau)} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\lambda_{11}(t-\tau)]^{n+1}}{(n+1)!} \frac{(\lambda_{21}x)^n}{n!} \right\} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\lambda_{13}(t-\tau)]^{n+1}}{(n+1)!} \frac{(\lambda_{23}z)^n}{n!} \right\} d\tau \end{aligned} \right. \quad (25)$$

Função de distribuição de probabilidade média $H_{tm}(x, z)$

$$H_{t1}(x, z) \leq \left\{ \left[H_t(x, z) = \frac{1}{t_d} \int_0^{t_d} F_{t-\tau}(x) F_{t-\tau}(z) d\tau \right] \equiv H_{tm}(x, z) \equiv \frac{1}{2} [H_{t1}(x, z) + H_{t2}(x, z)] \right\} \leq H_{t2}(x, z) \quad (26)$$

As funções de distribuição $F_{t-\tau}(x)$ e $F_{t-\tau}(z)$ referem-se às funções aproximativas nas direções longitudinal e vertical, respectivamente, obtidas do sistema de equações do Modelo Poissoniano Homogêneo 1D com imersão instantânea (Wilson-Jr. e Monteiro, 2016).

Conhecidos os valores das funções densidade de probabilidade longitudinal e vertical da concentração de partículas em suspensão, Lagrangeana ou Euleriana: analiticamente através das Equações 15 a 26, e experimentalmente do dispositivo das Figuras 6 e 7, determinam-se seus momentos estatísticos e em seguida, os valores de suas intensidades de mobilidade. A Equação 27, por exemplo, descreve a aproximação superior da média $[M_{t2}(x, z, t)]_{\text{Cont}}$ das posições temporais dos grãos, para o caso contínuo.

$$[M_{t2}(x, z, t)]_{\text{Cont}} = \frac{\lambda_{11}}{\lambda_{21}} \frac{\lambda_{13}}{\lambda_{23}} \left(t^2 - tt_d + \frac{t_d^2}{3} \right) \quad (27)$$

A hipótese que permite aplicar com sucesso a Teoria dos Processos Aleatórios aos casos 2D e 3D, é a da independência dos movimentos espaciais (Equação 15).

Ela permite analisar os movimentos numa direção, independentemente dos movimentos em outras direções. Assim, podem-se determinar os valores das intensidades de mobilidade dos grãos por equações simplificadas, que são ajustadas aos dados experimentais, como ilustrado em Wilson-Jr. e Monteiro, (2016, 2017).

5. APLICAÇÕES DOS MODELOS POISSONIANOS BIDIMENSIONAIS

Para as aplicações dos Modelos Poissonianos, reestruturou-se o aplicativo PAICON-1D, com novas saídas analíticas e gráficas, para o caso 2D (Wilson-Jr. e Monteiro, 2017). Cada par de valores da Função de Mobilidade descreve os movimentos do grão numa direção. Na Figura 9 mostram-se resultados das evoluções temporal de $f_t(x, z)$ para imersões contínuas de sedimentos, e na Figura 10, as variações de $q_x(z, t)$ através de seções transversais, para casos de imersões contínuas. As concentrações $C(x, z, t)$ são proporcionais aos valores das funções densidade de probabilidade.

| Tamanho do Grão D (mm) | Imersão Contínua – Mobilidades Longitudinais Constantes $\lambda_{1x} = 2.97 \text{ s}^{-1}$; $\lambda_{2x} = 10.00 \text{ m}^{-1}$; $U_s = 0.297 \text{ m/s}$ Período de Imersão $t_d = 420.0 \text{ s}$; Detecção Instantânea = 180.0 s | Mobilidade Vertical | | |
|---------------------------|--|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------|
| | | λ_{1z} s^{-1} | λ_{2z} m^{-1} | U_s m/s |
| 0,040 Silte Grosso | | 0,014 | 10,00 | 0,0014 |
| 0,080 Areia Muito Fina | | 0,058 | 10,00 | 0,0058 |
| 0,100 Areia Muito Fina | | 0,090 | 10,00 | 0,0090 |
| 0,125 Areia Fina | | 0,141 | 10,00 | 0,0141 |
| 0,160 Areia Fina | | 0,230 | 10,00 | 0,0230 |
| 0,200 Areia Fina | | 0,360 | 10,00 | 0,0360 |

Figura 9. Movimentos 2-D de sedimentos finos de diâmetros uniformes, injetados continuamente na superfície de um curso de água, durante um período de tempo. (Wilson-Jr. e Monteiro, 2016, 2017).

Os valores das Funções de Mobilidade consideram que: (i) a velocidade vertical do grão é igual à sua velocidade de queda, e (ii) que o transporte longitudinal tem o mesmo valor da velocidade média do escoamento. Para a velocidade de queda, adotou-se a Equação de Stokes, para grãos que variaram de 0,040 (silte grosso) a 0,200 mm (areia fina).

As erosões nos leitos, margens de rios, ilhas e bancos de sedimentos, a jusante de reservatórios de Usinas Hidrelétricas; os lançamentos de contaminantes de origem doméstica, industrial e nuclear, entre outros, são exemplos de interferências que colocam em movimento, por arraste e em suspensão, sedimentos da bacia hidrográfica e da calha do rio, com transferências verticais, ou seja, com interações entre estes tipos de movimentos.

Os modelos aleatórios descrevem os transportes e dispersões longitudinais e verticais dos sedimentos e poluentes imersos nos escoamentos. Apresentam-se na Figura 11, os movimentos de uma pluma de areia fina, $D = 0,125 \text{ mm}$, injetada na superfície livre, a uma taxa constante, durante o intervalo $[0, t_d=200\text{s}]$. O depósito no fundo é função do diâmetro e peso específico do grão, das propriedades hidrodinâmicas e hidráulicas do escoamento (profundidade, p.e.), que definem as mobilidades verticais λ_{1z} e λ_{2z} ; e longitudinais λ_{1x} e λ_{2x} .

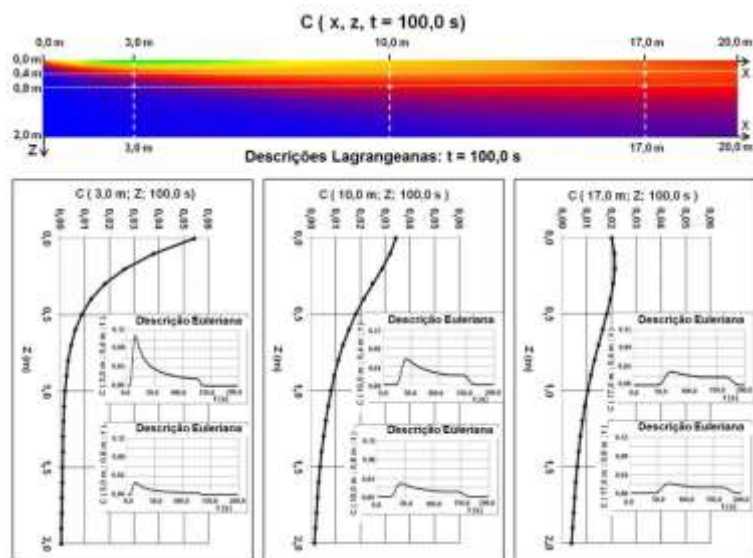


Figura 10. Concentração $C(x,z,t)$ de sedimentos finos imersos na superfície livre durante o intervalo $[0, t_d = 200 \text{ s}]$. Diâmetros $0,040 \leq D_i \leq 0,600 \text{ mm}$. (Wilson-Jr. e Monteiro, 2016, 2017)

Na Figura 12, apresentam-se os depósitos em profundidades distintas, de uma mistura de sedimentos de diâmetros conhecidos e igualmente distribuídos em peso ($i_{bd} = 0,25$). Os depósitos resultam da soma ponderada dos depósitos de cada grão.

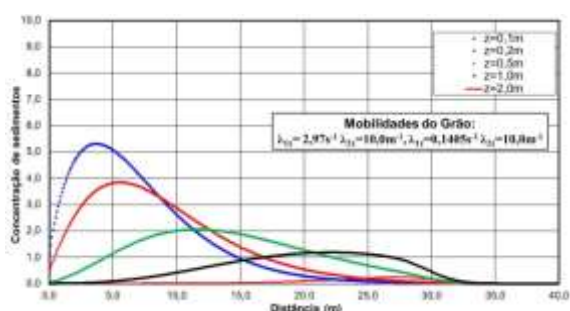


Figura 11. Deposição de sedimentos de $D = 0,125\text{mm}$ em escoamentos de profundidades variadas. Imersão durante um intervalo $[0, t_d=200\text{s}]$.

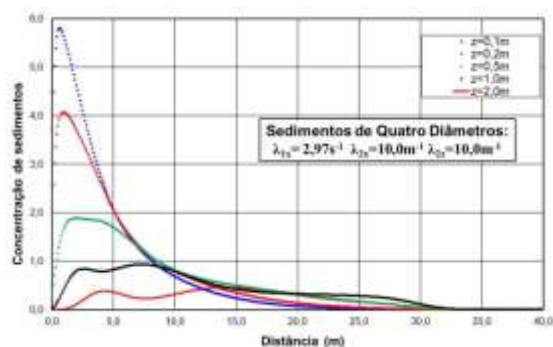


Figura 12. Deposição de uma mistura de sedimentos de diâmetros $D = 0,125; 0,200; 0,300$ e $0,600 \text{ mm}$, igualmente distribuídos. ($\lambda_{1z} = 0,1405; 0,360; 0,480$ e $1,395 \text{ s}^{-1}$)

6. CONCLUSÕES

Para o desenvolvimento, avaliação e validação dos Processos Aleatórios 1D e 2D, dos movimentos de sedimentos e poluentes, por arraste e suspensão, dispõe-se de um conjunto de resultados experimentais obtidos em canais de laboratório, com utilização de traçadores radioativos, onde o leito do escoamento se comporta de quatro modos distintos: (i) Como uma **barreira refletora** (Figura 13) de sedimentos coesivos de concentrações variadas e de sedimentos finos não coesivos de classes distintas de siltes e areias finas. (ii) Como uma **fonte de alimentação** do movimento por arraste de areias finas e grossas, uniformes ($D_{50} = 0,150$ e $1,200 \text{ mm}$), em regimes de rugas e dunas. (iii) Como **barreira de absorção**

parcial de sedimentos.

(iv) Como barreira de absorção dos sedimentos finos e, ao mesmo tempo, fonte de alimentação dos movimentos por arraste e ressuspensão de sedimentos.

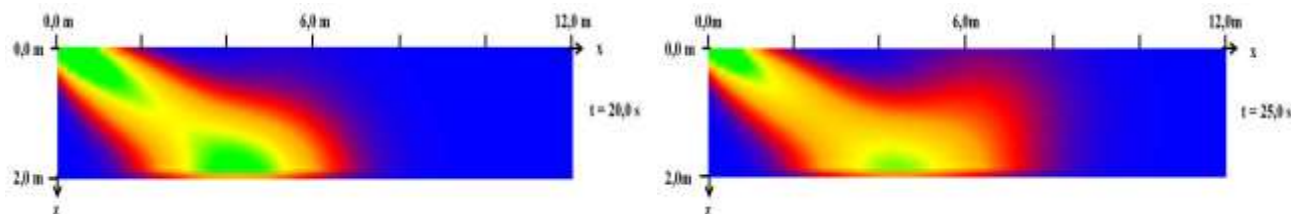


Figura 13. Pluma de sedimentos finos de diâmetro $D = 0,600$ mm, refletida pelo leito de um canal de profundidade $h = 2,00$ m.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao CENS/CEA/França, à COPPE/UFRJ, ao CDTN/CNEN e ao CNPq, Brasil, sem os quais este trabalho não teria sido realizado.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

a. Artigo em actas de congresso (ou equiparado)

Monteiro, C.S.G. e Wilson-Jr G. (2001). PAICON 4.0: um software descritivo do movimento de sedimentos e poluentes, com uso da teoria dos processos aleatórios. XIV Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos, ABRH. Aracaju, SE, Brasil.

Todorović, P.; Vukmirović, V.; Vukotić, R.; Filip, A. (1966). A contribution to the kinetic theory of bed-material discharge. Symposium on the Use of Isotopes in Hydrology. IAEA, p 271-290. Viena.

Vukmirović, V. ; Wilson-Jr. G. (1976). Mouvement du sédiment charrié – processus aléatoire. II International IAHR Symposium on Stochastic Hydraulics. Lund, Sweden, August.

Vukmirović, V. ; Wilson-Jr. G. (1977). Un modèle aléatoire du sédiment charrié. XVII Congrès de l'IAHR. Baden-Baden, Août.

Wilson-Jr., G. (2012). Funciones de intensidad de mudanza del estado cinemático del movimiento de los sedimentos en los cursos de agua. XXV Congreso Latinoamericano de Hidráulica. Costa Rica.

Wilson-Jr., G. e Monteiro, C.S.G. (2016). Homogeneous two-dimensional Poissonian model applied to the suspended movement of pollutant and non-uniform fine sediment in open-channel flow. River Sedimentation – Wieprecht *et al.* (Eds); p. 478-485. Stuttgart, Germany.

Wilson-Jr., G., Monteiro, C.S.G. (2017). Modelos aleatórios 2-D do movimento de sedimentos em suspensão em cursos de água. 13º Simpósio de Hidráulica e Recursos Hídricos dos Países de Língua Portuguesa. 13º SILUSBA. Porto, Portugal.

b. Artigo de revista científica

Yang T., Sayre W. W. (1971). Stochastic model for sand dispersion. Journal of the Hydraulics Division, ASCE, vol. 97, nº HY2, February.

c. Teses ou dissertações

Monteiro, C.S.G. (2004). Processos aleatórios com injeções instantânea e contínua, aplicados ao movimento de sedimentos e poluentes em escoamentos com superfície livre. Dissertação de Mestrado em Ciências em Engenharia Civil. COPPE/UFRJ. Rio de Janeiro, 294 p., Brasil.

Vukmirović, V. (1975). Analiza kretanja vucenog nanosa pomocu slucajnih procesa. Tese de Doutorado. Faculdade de Engenharia Civil. Universidade de Belgrado. Iugoslávia.

Wilson-Jr G. (1987). Etude du transport et de la dispersion des sédiments en tant que processus aléatoires. Thèse de Doctorat d'Etat ès Sciences Physiques. Université Paris VI, France.