



7, 8 e 9
Março 2018
ÉVORA
Évora Hotel

GESTÃO DOS
RECURSOS HÍDRICOS:
NOVOS
DESAFIOS

MODELAÇÃO BI-VARIADA DA ALTURA DE ONDA SIGNIFICATIVA E PERÍODO MÉDIO ATRAVÉS DE CÓPULAS

A vantagem da extra-parametrização de cópulas

Tiago, FAZERES-FERRADOSA¹; Francisco TAVEIRA-PINTO²;

¹Doutorando em Engenharia Civil, Secção de Hidráulica Recursos Hídricos e Ambiente, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal

²Professor Catedrático, Secção de Hidráulica Recursos Hídricos e Ambiente, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal

Resumo

O dimensionamento de infraestruturas marítimas e costeiras é uma tarefa de complexidade assinalável, que requer um conhecimento detalhado das condições ambientais durante a construção, período de vida útil e desativação da obra. Uma vasta variedade de problemas relacionados com a segurança e fiabilidade, deste tipo de estruturas, encontra-se dependente da capacidade de prever e minimizar as incertezas inerentes à informação meta-oceânica, do local de implantação. Dois dos parâmetros mais importantes, para efeitos de dimensionamento deste tipo de obras, são a altura de onda significativa e período médio da onda. Contudo, em virtude da complexidade do ambiente marítimo, nomeadamente, no que respeita às limitações físicas dos fenómenos de agitação, como por exemplo a declividade ou a interação com a existência de correntes, tornam praticamente impossível a obtenção de modelos perfeitos, que possam prever a evolução a longo prazo destas variáveis. Frequentemente, o comportamento bi-variado de valores característicos de altura de onda e de respectivo período revela uma evidente assimetria, que comporta dificuldades ao nível da sua modelação estatística e da sua correlação. Uma possível solução para o problema da assimetria passa pela construção de cópulas assimétricas, com recurso à técnica de extra-parametrização. O presente estudo fornece um caso de aplicação da técnica referida, para dados referentes ao parque eólico offshore Horns Rev 3 (Dinamarca). Os dados obtidos permitiram concluir que a extra-parametrização de copulas simétricas permite a construção de modelos bi-variados de altura de onda e período médio, que se encontram muito mais próximos da avaliação não-paramétrica da amostra estudada. O “*Goodness-of-fit*” dos modelos propostos foi avaliado com base nas estimativas da distância de Crámer-von Mises..

Palavras-chave: Período médio da onda, Altura de onda significativa, Modelo estatístico bi-variado, Cópula.

Tema: Mar, zonas costeiras e obras marítimas.

1. INTRODUÇÃO

Uma vasta variedade de problemas relacionados com a segurança e fiabilidade, das estruturas costeiras e marítimas, encontra-se dependente da capacidade de prever e minimizar as incertezas inerentes à informação meta-oceânica, do local de implantação (Vanem, 2016). Dois dos parâmetros mais importantes, para efeitos de dimensionamento deste tipo de estruturas, são a altura de onda significativa (H_s) e o período médio da onda (T_z). A necessidade de executar previsões com máximo rigor possível, tem levado a comunidade científica a propor diversos modelos estatísticos para prever o comportamento destas variáveis, e.g. Ferreira & Guedes-Soares (2002), Dong *et al.* (2013) ou Jonathan & Ewans (2013). O período de pico também costuma ser alvo de análise, embora o mesmo possa ser obtido com recurso ao período médio.

Por ventura, um dos modelos mais recentes e de simples aplicação é preconizado pela utilização de cópulas (Corbella & Stretch, 2013; Montes-Iturrizaga & Heredia-Zavoni 2015). As cópulas são funções que traduzem o comportamento multivariado de variáveis aleatórias, baseando-se apenas nas funções marginais de cada variável e numa medida de associação entre as mesmas, habitualmente o coeficiente de correlação de Kendall ou de Spearman. Os modelos estatísticos para prever o comportamento bi-variado de alturas de onda e respetivos períodos têm vindo a ser apresentados com recurso a cópulas simples, na sua grande maioria de natureza simétrica, e.g. Jane *et al.* (2016) ou Montes-Iturrizaga & Heredia-Zavoni (2016). Exemplos disto, passam pela aplicação das famílias de cópulas Arquimedianas (Frank, Clayton e Gumbel) e Elípticas (ex: Gaussiana ou cópula t). Assim sendo, a sua aplicação a variáveis que apresentam um comportamento probabilístico altamente assimétrico, como é o caso dos parâmetros de agitação marítima, pode conduzir a modelos que nem sempre se encontram perto do comportamento das observações para um dado local.

No entanto, o desenvolvimento de construções de cópulas mais complexas e com características assimétricas, como é o caso das cópulas apresentadas em Jäger & Napoles (2015), tem permitido uma aplicação mais abrangente e precisa destes modelos, no âmbito das variáveis relacionadas com a agitação marítima. A extra-parametrização de cópulas através do algoritmo de Khoudraji, inicialmente apresentada por Khoudraji (1995) e mais tarde utilizada em variáveis de agitação marítima nos trabalhos de Durante & Salvadori (2010) e de Vanem (2016; 2017), tem-se revelado como uma alternativa de fácil implementação, permitindo a obtenção de amostragens mais próximas dos valores observados de H_s e T_z . Neste artigo apresenta-se um breve exemplo da aplicação da técnica referida, demonstrando-se que o *goodness-of-fit* de cópulas extra-parametrizadas é substancialmente melhor quando comparado com o *goodness-of-fit* obtido com recurso a cópulas simétricas.

2. CASO DE ESTUDO E METODOLOGIA

Os dados utilizados para a presente investigação correspondem a séries temporais reconstruídas de alturas de onda significativa e períodos médios, para o período de 01-01-2003 a 01-05-2013. Os dados foram obtidos para as seguintes coordenadas: Latitude 55.725°N e Longitude 7.750°E, que dizem respeito à localização do parque eólico offshore Horns Rev 3 (Dinamarca).

O referido local encontra-se no Mar do Norte (Figura 1), a cerca de 20-35 km Noroeste de Blåvands Huk e 45-60 km da cidade de Esbjerg (DMI, 2013). Esta é uma área com profundidades que variam entre 10 a 20 m. Os dados obtidos com valores horários correspondem a um total de 90553 pares de H_s e T_z , cujas medidas descritivas se encontram na Tabela 1. Durante a presente investigação não se efectuou qualquer tipo de tratamento dos dados no que respeita à direção incidente das ondas. Tendo em vista a remoção da dependência temporal de curto prazo e da sazonalidade dos dados em questão, os dados foram processados de acordo com o procedimento referido em Vanem (2016). Recolheram-se o valor máximo de cada 48 horas da altura de onda significativa e respectivo período médio associado, obtendo-se assim uma sub-amostragem, dos dados originais, à qual foi, posteriormente, retirada a sazonalidade que viria a ser introduzida novamente aquando a obtenção de valores simulados através das cópulas. A Figura 2 mostra os valores originais, a respetiva sub-amostragem, bem como os valores dos dados processados, que foram também eles incluídos na Tabela 1.

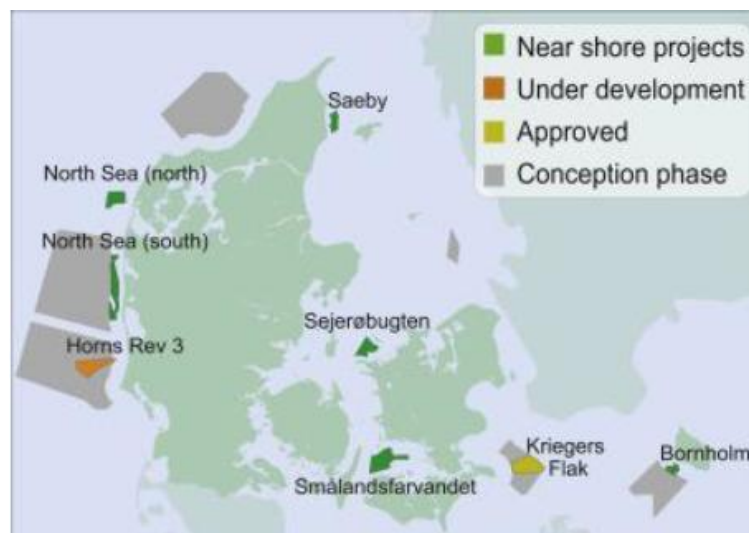


Figura 1. Parque eólico Horns Rev 3 localizado no mar do Norte (Rodrigues et al., 2015).

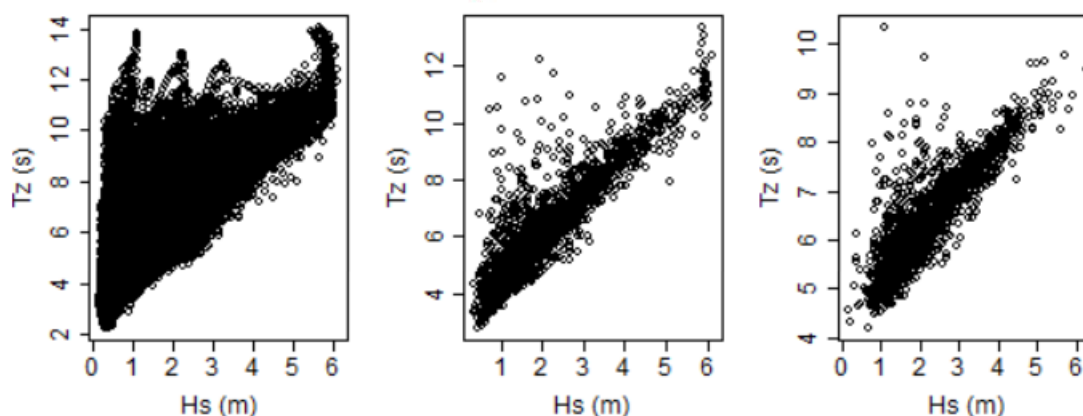


Figura 2. Dados originais, sub-amostragem e dados processados com remoção da sazonalidade, da esquerda para a direita.

Tabela 1. Dados descritivos da agitação marítima para o período 01-01-2003 a 01-05-2013, séries reconstruídas originais e dados processados com remoção da sazonalidade.

| Descriptive | Originais | | Processados | |
|------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| | H _s (m) | T _z (s) | H _s (m) | T _z (s) |
| Média | 1.458 | 5.9 | 2.203 | 6.4 |
| Mediana | 1.220 | 5.6 | 1.976 | 6.2 |
| Desvio padrão | 0.932 | 1.7 | 0.986 | 1.0 |
| Máximo | 6.110 | 14.0 | 6.261 | 10.3 |
| Mínimo | 0.140 | 2.2 | 0.136 | 4.2 |
| Percentil 25% | 0.800 | 4.6 | 1.460 | 5.6 |
| Percentil 50% | 1.220 | 5.6 | 1.976 | 6.2 |
| Percentil 75% | 1.850 | 6.9 | 2.771 | 7.1 |
| Percentil 90% | 2.690 | 8.2 | 3.685 | 7.7 |
| Percentil 99% | 4.780 | 10.7 | 4.985 | 8.8 |
| Percentil 99.5% | 5.320 | 11.3 | 5.303 | 9.0 |
| Percentil 99.9% | 5.890 | 12.7 | 5.872 | 9.7 |

Os estudos levados a cabo por Fazeres-Ferradosa *et al.* (2018) permitiram concluir, que tanto os dados processados da altura de onda como o respectivo período médio

poderiam ser modelados com com distribuições marginais lognormais, com parâmetros (μ ; σ) e intervalos de confiança de 95% que se encontram na Tabela 2.

Tabela 2. Parâmetros das distribuições lognormais e intervalos de confiança de 95% para os dados processados.

| | Combined | |
|--|----------------|----------------|
| | H_s | T_z |
| μ | 0.691 | 1.840 |
| Intervalo de confiança 95% de μ | [0.669; 0.711] | [1.833; 1.847] |
| σ | 0.454 | 0.152 |
| Intervalo de confiança 95% de σ | [0.440; 0.469] | [0.147; 0.157] |

De acordo com a teoria de copulas a função conjunta da altura de onda e período médio, $F(H_s; T_z)$, pode ser construída de com base na Função Cópula $C(F_1(H_s); F_2(T_z))$ que apenas depende das funções distribuição acumulada de cada uma das variáveis, i.e. $F_1(H_s)$ e $F_2(T_z)$, como indicado pela equação 1. Neste caso, $F_1(H_s)$ e $F_2(T_z)$ são construídas segundo as distribuições lognormais apresentadas na tabela 2. Determinando que $u=F_1(H_s)$ e que $v=F_2(T_z)$, então u e v seguem distribuições uniformes entre 0 e 1.

$$F(H_s; T_z) = C(F_1(H_s); F_2(T_z)) = C(u, v) \quad (1)$$

Habitualmente, a estimativa dos parâmetros da função Cópula $C(u, v)$ implica a obtenção de uma medida de correlação entre as variáveis que se pretendem modelar. Para o devido efeito utilizou-se a medida de correlação de Kendall (τ_K) cujo valor obtido foi de 0.68, indicando uma correlação positiva entre alturas de onda e períodos. Mais detalhes sobre o cálculo desta medida podem ser obtidos em Fazeres-Ferradosa *et al.* (2018). O valor obtido apresenta coerência na medida em que alturas de onda significativas elevadas estão associadas a períodos de onda maiores. Acresce-se ainda, que o $\tau_K=0.68$ é um valor que se encontra na gama de valores obtidos para as mesmas variáveis em estudos semelhantes da especialidade, nomeadamente em Corbella & Stretch (2013) ou Redón-Conde & Heredia-Zavoni (2015). Existem diversas formulações para a construção da cópula $C(u, v)$, sendo que nesta matéria se recomenda a consulta de Nelsen (2006), para uma melhor perceção das formulações matemáticas utilizadas em cada um dos modelos referidos.

A técnica de extra-parametrização de cópulas utilizada no presente artigo, passou pela utilização do algoritmo de Khoudraji (1995), que associa uma cópula $C_1(u^\alpha, v^\beta)$ a uma segunda cópula $C_2(u^{1-\alpha}, v^{1-\beta})$, de acordo com a equação 2. Neste estudo, todas as cópulas foram extra-parametrizadas com uma cópula C_2 igual à copula independente $I(u^{1-\alpha}, v^{1-\beta})$. Os parâmetros θ , α e β foram estimados através da minimização da distância de Crámer von-Mises (s) de acordo com o procedimento implementado em Vanem (2016). A referida distância avalia o afastamento da cópula utilizada relativamente à copula construída com base nas distribuições marginais empíricas de H_s e T_z . A utilização da distância de Crámer-von Mises como medida de *goodness-of-fit*, permite comparar os modelos entre si, sendo que o modelo que melhor representa os dados originais, é aquele que conduz à menor distância s , ou seja, aquele que leva à simulação de conjuntos de pares $(H_s; T_z)$ se encontram mais próximo dos pares originais (Figura 2).

$$C(u, v) = C_1(u^\alpha, v^\beta) \cdot I(u^{1-\alpha}, v^{1-\beta}) = C_1(u^\alpha, v^\beta) \cdot u^{1-\alpha} \cdot v^{1-\beta} \quad (2)$$

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

A Figura 3 apresenta os valores de u e v que correspondem, na verdade, aos valores empíricos da probabilidade acumulada conjunta de de um determinado par $(H_s; T_z)$ não ser excedido, i.e. $P(u, v) = P(H_s < u, T_z < v)$, bem como os mesmos valores obtidos para a cópula de Gumbel (simétrica sem extra-parametrização), que havia sido identificada como a cópula com a menor distância de Crámer-von Mises, dentro do conjunto de cópulas estudadas (Tabela 3). Como se pode observar, existe uma assimetria nos dados empíricos que não é bem representada pela cópula Gumbel. A linha recta colocada na Figura 3 corresponde à simetria $u=v$.

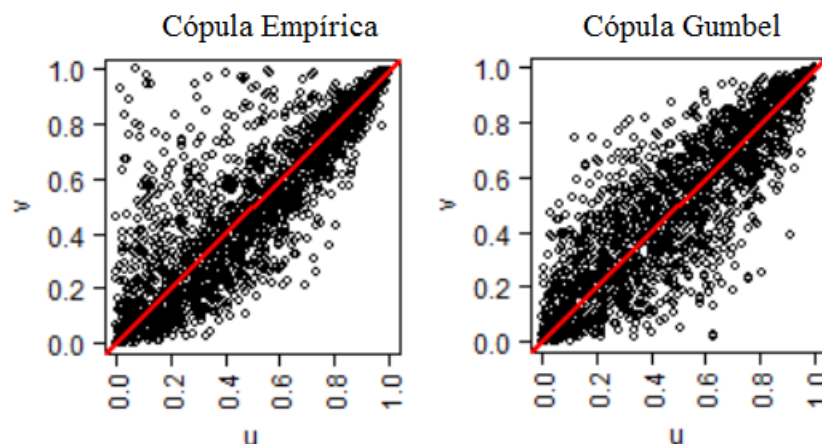


Figure 3. Comparação entre a cópula empírica e a cópula Gumbel, no espaço de probabilidades (u, v) .

Os valores obtidos para o parâmetro θ e a distância de Crámer-von Mises encontram-se na Tabela 3. Note-se que estas cópulas sendo simétricas apenas possuem um parâmetro θ , dado que os parâmetros adicionais α e β apenas são acrescentados com a técnica de extra-parametrização.

Tabela 3. Parâmetros e distâncias de Crámer-von Mises para as cópulas simétricas.

| Copula | θ | s |
|----------|----------|--------|
| Clayton | 5.105 | 2.2590 |
| Frank | 9.779 | 0.6682 |
| Gumbel | 3.161 | 0.3840 |
| Normal | 0.879 | 0.6536 |
| Joe | 5.252 | 0.5857 |
| Plackett | 36.288 | 0.5463 |

Na Figura 4, pode-se observar um conjunto de 10 000 pares ($H_s; T_z$) gerados a partir da cópula Gumbel, após a introdução da sazonalidade. Torna-se possível constatar que os valores de altura de onda significativa excedem claramente os valores máximos demonstrados pelos originais, bem como os da sub-amostragem efectuada com os valores de máximos bi-diários de altura de onda significativa e respectivos períodos médios. A cópula Gumbel fornece ainda um conjunto de pares cuja assimetria não é tão acentuada como a que se observa nas séries temporais obtidas para Horns Rev 3.

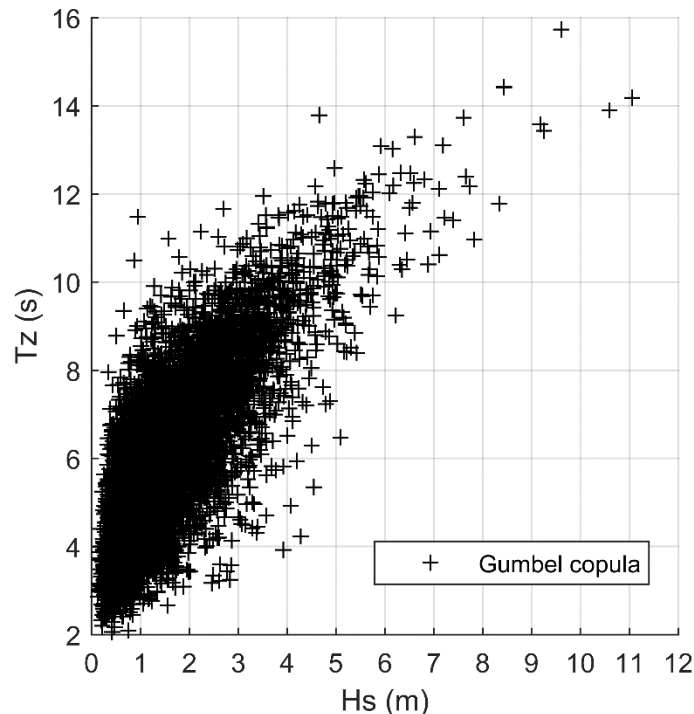


Figura 4. Conjunto de 10 000 pares ($H_s; T_z$) com inclusão da sazonalidade.

Os resultados obtidos demonstram que a melhor das cópulas simétricas, i.e. a cópula Gumbel que apresentou a menor distância de Crámer-von Mises, se manifestou incapaz de reproduzir o comportamento bi-variado das séries temporais reconstruídas. A incapacidade de reproduzir o comportamento bi-variado de H_s e de T_z , por parte das cópulas simétricas encontra-se de acordo com a investigação levada a cabo por Vanem (2016) ou Fazerres-Ferradosa et al. (2018).

Tendo em vista a melhoria dos modelos simétricos, anteriormente obtidos, utilizou-se a técnica de extra-parametrização com recurso à cópula independente. Uma vez mais, os parâmetros das cópulas foram estimados com recurso à minimização da distância de Crámer-von Mises. Os valores obtidos para os parâmetros e para as distâncias de Crámer-von Mises encontram-se na Tabela 4. Como se pode observar, para todas as cópulas testadas anteriormente, a introdução de parâmetros adicionais permitiu obter distâncias de Crámer-von Mises menores. Este facto deve-se ao facto de a introdução de parâmetros adicionais (α ; β), a cada uma das referidas cópulas, contribuir para um aumento considerável da flexibilidade dos modelos. Assim sendo, tornou-se possível uma melhor descrição do comportamento assimétrico de H_s e dos respetivos valores de T_z associados.

Tabela 4. Parâmetros e distâncias de Crámer-von Mises para as cópulas com extra-parametrização através de uma cópula independente.

| Cópula | $\alpha; \beta; \theta$ | s |
|-----------------|-------------------------|--------|
| Clayton | 0.936; 0.812; 26.776 | 0.4084 |
| Frank | 0.977; 0.846; 18.203 | 0.2207 |
| Gumbel | 1; 0.868; 4.445 | 0.0665 |
| Normal | 0.983; 0.849; 0.956 | 0.1674 |
| Joe | 0.985; 0.856; 8.147 | 0.0869 |
| Plackett | 1; 0.868; 93.048 | 0.2055 |

A cópula Gumbel manteve-se como a que evidenciou a menor distância de Crámer-von Mises. Na Figura 5 apresenta-se o espaço de probabilidades (u,v), semelhante ao da Figura 3, embora com a aplicação da extra-parametrização. Como se constata pela figura a assimetria é agora melhor representada pela cópula extra-parametrizada.

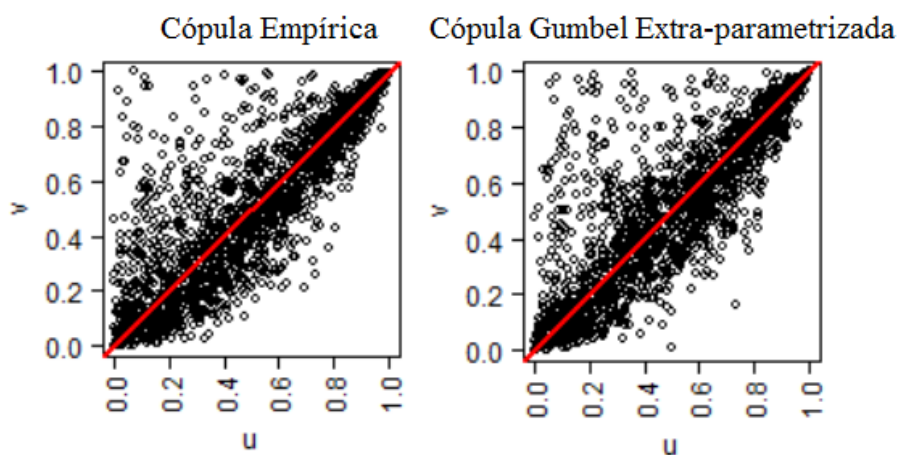


Figure 5. Comparação entre a cópula empírica e a cópula Gumbel Extra-parametrizada, no espaço de probabilidades (u,v)

Na Figura 6 pode-se observar novamente um conjunto de 10 000 pares de $(H_s; T_z)$, com a sazonalidade reintroduzida, comparados com os valores da sub-amostragem, i.e. os máximos bi-diários de H_s e respetivos T_z . A figura permite concluir que o ajuste providenciado pela cópula extra-parametrizada é claramente melhor do que aquele que havia sido obtido através da cópula simétrica. As melhorias obtidas com recurso à técnica de extra-parametrização corroboram as melhorias obtidas para outros casos, nomeadamente, Durante & Salvadori (2010) ou Vanem (2016).

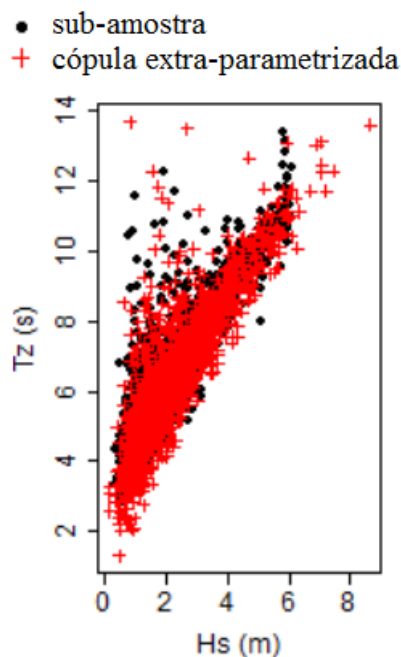


Figure 6. Simulação de 10 000 pares $(H_s; T_z)$ com inclusão da sazonalidade comparados com a sub-amostra.

4. CONCLUSÕES

O presente trabalho focou-se na modelação bi-variada da altura de onda significativa e período médio através da utilização de cópulas simétricas e copulas extra-parametrizadas. A investigação focou-se nas séries temporais reconstruídas de ambas as variáveis, disponíveis em DMI (2013). Os dados analisados dizem respeito ao parque eólico offshore Horns Rev 3, sendo que os mesmos foram tratados de acordo com o procedimento detalhado por Vanem (2016), nomeadamente, no que respeita à sazonalidade e dependência de curto prazo.

Efetuuou-se a aplicação de diversas cópulas simétricas, tendo-se extra-parametrizado as mesmas através da cópula independente. A técnica de extra-parametrização permitiu uma melhoria significativa das distâncias de Crámer-von Mises em todos os modelos. A

cópula Gumbel revelou-se como o modelo com a menor distância, quer na sua versão simétrica quer na sua versão extra-parametrizada. A cópula extra-parametrizada foi capaz de captar a assimetria dos dados originais, quer no espaço de probabilidades (u,v) quer no espaço original $(H_s; T_z)$. Face aos resultados obtidos, a utilização desta técnica em estudos de estruturas marítimas e offshore poderá permitir o aumento da precisão da avaliação do comportamento das mesmas, nomeadamente, no caso das estruturas analisadas através de cópulas, e.g. Montes-Iturrizaga & Heredia-Zavoni (2016) ou Redón-Conde & Heredia-Zavoni (2015),

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Corbella, S., & Stretch, D. (2013). Simulating a multivariate sea storm using Archimedean copulas. *Coastal Engineering*. vol.76, 68-78.
- DML. (2013). *Horns Rev 3 Offshore Wind Farm - Meteocean*. Copenhagen, Denmark: DML - Danish Meteorological Institute & Orbicon A/S.
- Dong, S., Wang, N., Liu, W., & Soares, C. G. (2013). Bivariate maximum entropy distribution of significant wave height and peak period. *Ocean Engineering*. Vol. 59, 86-99.
- Durante, F., & Salvadori, G. (2010). On the construction of multivariate extreme models via copulas. *Environmetrics* 21, 143-161.
- Fazeres-Ferradosa, T., Taveira-Pinto, F., Vanem, E., Reis, M. T., & Neves, L. d. (2018). Asymmetric Copula-based Distribution Models for met-ocean data in offshore wind engineering applications. *Wind Engineering*, In Press.
- Ferreira, J., & Guedes-Soares, C. (2002). Modelling bivariate distributions of significant wave height and mean wave period. *Applied Ocean Research*. vol. 24. issue 1., 31-45.
- Jäger, W., & Napoles, O. (2015). Sampling Joint Time Series of Significant Wave Heights and Periods in the North Sea. *Proceedings of the 25th ESRELconference* (pp. 4287-4294). Boca Raton: CRC Press.
- Jane, R., Valle, L. D., Simmonds, D., & Rabya, A. (2016). A copula-based approach for the estimation of wave height records through spatial correlation. *Coastal Engineering*. vol. 117, 1-18.
- Jonathan, P., & Ewans, K. (2013). Statistical Modelling of extreme ocean environments for marine design: A review. 62, 91-109.
- Khoudraji, A. (1995). *Contributions à l'étude des copules et à la modélisation des valeurs extrêmes bivariées - PhD thesis*. Québec, Canada: Université Laval.
- Montes-Iturrizaga, R., & Heredia-Zavoni, E. (2015). Environmental contours using copulas. *Applied Ocean Research*, vol. 52, 125-139.



Montes-Iturrizaga, R., & Heredia-Zavoni, E. (2016). Reliability analysis of mooring lines using copulas to model statistical dependence of environmental variables. *Applied Ocean Research*, vol. 59, 564-576.

Redón-Conde, C., & Heredia-Zavoni, E. (2015). Reliability assessment of mooring lines for floating structures considering statistical parameter uncertainties. *Applied Ocean Research*, vol. 52, 295-308.

Rodrigues, S., Restrepob, C., Kontos, E., Pinto, R. T., & Bauer, P. (2015). Trends of offshore wind projects. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 49, 1114–1135.

Vanem, E. (2016). Joint statistical models for significant wave height and wave period in a changing climate. *Marine Structures*, 49, 180-205.

Vanem, E. (2017). A regional extreme value analysis of ocean waves in a changing climate. *Ocean Engineering*, 277-295.