

# MODELAÇÃO ESTOCÁSTICA DE ESCOAMENTOS EM AQUÍFEROS. SIMULAÇÕES DE MONTE-CARLO CONDICIONADAS

Manuel M. PACHECO FIGUEIREDO<sup>(1)</sup>, Luís RIBEIRO<sup>(2)</sup> e José M. P. FERREIRA  
LEMONS<sup>(3)</sup>

## RESUMO

Na sequência do desenvolvimento e teste de programas para a simulação estocástica de escoamentos em aquíferos porosos regionais pelo Método dos Elementos Finitos têm sido resolvidos vários exemplos de aplicação. Os resultados referentes a alguns desses problemas são aqui organizados e apresentados. Em particular, analisa-se o impacto resultante de se admitir que o logaritmo da transmissividade se comporta como uma função aleatória estacionária, ergódica e multivariada normal. A distribuição “real” da transmissividade é amostrada aleatoriamente num conjunto de pontos do aquífero. A partir da amostra são geradas realizações condicionadas da transmissividade que permitem a resolução dos exemplos por simulações de Monte-Carlo. Da mesma amostra também se retira o valor da transmissividade efectiva, assim como uma estimativa do comportamento espacial da transmissividade por krigagem. Os resultados obtidos pelas simulações de Monte-Carlo condicionadas são comparados com os produzidos pelas simulações correspondentes à distribuição “real” da transmissividade e às estimativas desta por krigagem e por valor efectivo.

**Palavras-chave:** Aquíferos, Modelação Estocástica, Simulações de Monte-Carlo, Elementos Finitos.

---

<sup>(1)</sup> Assistente da FEUP

<sup>(2)</sup> Professor Auxiliar do IST

<sup>(3)</sup> Professor Associado c/ Agregação da FEUP

## 1 - INTRODUÇÃO

A gestão de um aquífero, ou sistema aquífero, exige o desenvolvimento e utilização de modelos que simulem adequadamente os escoamentos em meios porosos e/ou fracturados. Atendendo à heterogeneidade do meio natural, os modelos de simulação devem ter em conta a incerteza associada à avaliação das recargas e extracções, dos parâmetros hidrogeológicos e das condições fronteira, tratando-os como funções aleatórias ou processos estocásticos, estatisticamente caracterizáveis. Assim, a equação diferencial que rege o escoamento transforma-se numa equação diferencial estocástica, cuja variável dependente (*carga hidráulica*) é também um processo estocástico estatisticamente caracterizável. Por outras palavras, a resolução da equação diferencial estocástica deveria conduzir à função de distribuição de probabilidade conjunta da variável dependente. Na prática já se considera aceitável a determinação, para cada ponto do domínio e para cada instante, do valor esperado (*média*) e de uma medida da incerteza (*variância*).

Neste trabalho apresentam-se e comparam-se, de uma forma sucinta, vários modos alternativos de modelar o escoamento, tendo em consideração a incerteza relativa à quantificação da transmissividade:

- elaborar um modelo matemático que relacione os valores esperados das variáveis em jogo à custa da utilização da designada “transmissividade efectiva”;
- simular o escoamento com base numa estimativa do comportamento espacial da transmissividade obtida por krigagem;
- gerar um número adequado de realizações condicionadas da transmissividade e resolver a equação diferencial para cada uma destas, procedendo posteriormente a um tratamento estatístico dos resultados obtidos (simulações de Monte-Carlo).

Os resultados obtidos são comparados entre si e com os correspondentes à simulação do escoamento para uma distribuição espacial da transmissividade eleita como “real”, proporcionando assim uma avaliação do impacto produzido nos resultados pelas diferentes abordagens ao tratamento da incerteza associada à estimação da transmissividade.

A distribuição “real” de  $T$  é amostrada em 55 pontos escolhidos aleatoriamente. A partir da amostra são extraídas as informações estatísticas necessárias à caracterização da transmissividade pelo valor “efectivo”, por krigagem ou por realizações estocásticas condicionadas.

Esta propriedade do aquífero,  $T$ , é tratada como uma *função aleatória* das coordenadas espaciais. Em particular, admite-se que a sua transformada,  $Y = \ln(T)$ , é uma função aleatória *estacionária, ergódica e multivariada normal*. A incerteza resultante da variabilidade espacial de  $T$  reflecte-se na grandeza da variância. Com o objectivo de avaliar o impacto desta nos resultados, o problema apresentado é resolvido para duas distribuições diferentes da transmissividade, correspondentes a distintos valores da variância, embora com médias e distâncias integrais idênticas.

Os exemplos de aplicação foram concebidos para um domínio (aquífero) rectangular com  $6000 \times 3000 \text{ m}^2$ , discretizado por elementos finitos isoparamétricos de oito nós de

150×150 m<sup>2</sup>. Os resultados apresentados correspondem ao regime permanente obtido após estabilização das simulações numéricas iniciadas para um valor constante da carga hidráulica em todo o domínio (100 m). Admitiu-se a transmissividade constante ao longo do tempo e um valor pequeno para S (ou  $\omega_d$ ) (0.004) de modo a acelerar o estabelecimento do regime permanente pretendido. Assim, os resultados obtidos são válidos, em regime permanente, tanto para aquíferos confinados como para não confinados desde que se admita que a espessura do aquífero é grande quando comparada com a variação de H.

## 2 - AQUÍFEROS REGIONAIS. FORMULAÇÃO DIRECTA

### 2.1 - Aquíferos regionais confinados. Formulação matemática

O escoamento em formações porosas confinadas é governado pela seguinte equação diferencial:

$$\text{div}([\mathbf{T}] \cdot \mathbf{grad} H) = S \frac{\partial H}{\partial t} + R + \sum_{i=1}^N Q_i \delta(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_i) \quad (1)$$

sendo H a carga hidráulica ou nível piezométrico (m),  $\mathbf{T}$  a matriz de transmissividade (m<sup>2</sup>/d), S o coeficiente de armazenamento (m/m), R as recargas ou perdas por unidade de superfície (m/d) e  $Q_i$  as recargas ou extracções pontuais (m<sup>3</sup>/d). Os elementos da matriz de transmissividade não dependem de H, uma vez que a espessura do aquífero é determinada pelos estratos confinantes.

### 2.2 - Aquíferos regionais não confinados. Formulação matemática

O escoamento em formações porosas não confinadas é governado pela seguinte equação diferencial:

$$\text{div}([\mathbf{T}] \cdot \mathbf{grad} H) = \omega_d \frac{\partial H}{\partial t} + R + \sum_{i=1}^N Q_i \delta(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_i) \quad (2)$$

sendo  $\omega_d$  a porosidade drenável. A fronteira superior do aquífero corresponde ao nível freático, variável no espaço e no tempo, pelo que a transmissividade depende da solução do problema, isto é de H, uma vez que é calculada pela integração da condutividade hidráulica segundo a vertical:

$$T = \int_{z_0}^H K dz \quad (3)$$

Contudo, se a variação do nível piezométrico não fôr significativa relativamente à espessura do aquífero poder-se-á desprezar a referida dependência.

### 2.3 - Condição inicial e condições fronteira

A aplicação destas equações diferenciais a um determinado domínio (aquífero) e a respectiva resolução requerem a prévia definição das condições iniciais, isto é, do valor de H

no instante inicial do período de tempo a estudar. É também necessário conhecer, ao longo do tempo, as condições do escoamento na fronteira do domínio, as quais podem ser de três tipos:

- condição fronteira principal (Dirichlet): o valor de  $H$  é imposto;
- condição fronteira secundária (Neumann): o fluxo através da fronteira  $q_n = -([\mathbf{T}] \cdot \mathbf{grad} H)|_{\bar{\mathbf{n}}}$  é imposto;
- condição fronteira mista (Cauchy): é imposta uma relação linear entre os dois primeiros tipos de condição, isto é, o fluxo através da fronteira varia linearmente com o valor de  $H$  na fronteira:

$$H + a([\mathbf{T}] \cdot \mathbf{grad} H)|_{\bar{\mathbf{n}}} + b = 0 \quad (4)$$

## 2.4 - Transmissividade. Caracterização estatística

Ao definir a transmissividade como variável ou função aleatória, os modelos determinísticos acima apresentados são transformados em modelos estocásticos. Em particular, admite-se que  $T$  tem um comportamento logarítmico-normal, isto é, que a sua transformada,  $Y = \ln(T)$ , tem uma função de distribuição de probabilidade univariada normal. E também se admite que  $Y(\bar{\mathbf{x}})$  é uma função aleatória estacionária, ergódica e multivariada normal, pelo que a respectiva estrutura probabilística é completamente definida por quatro parâmetros (a média  $m_Y$ , a variância  $\sigma_Y^2$ , o efeito pepita  $w$  e a distância integral  $I_Y$ ) e pelo tipo de semivariograma (esférico, exponencial ou Gaussiano).

## 3 - ESTIMAÇÃO DA TRANSMISSIVIDADE

### 3.1 - Transmissividade efectiva ( $T_{ef}$ )

Tendo em vista a determinação dos valores esperados da carga hidráulica,  $\langle H(\bar{\mathbf{x}}, t) \rangle$ , e do fluxo,  $\langle \bar{\mathbf{q}}(\bar{\mathbf{x}}, t) \rangle$ , as equações aplicáveis ao fenómeno são reescritas com a transmissividade definida pelo seu valor efectivo,  $T_{ef}$ , constante em todo o domínio. DAGAN (1989) admite que este seja aproximadamente igual à média geométrica,  $T_G$ :

$$T_{ef} \approx T_G = \exp(m_Y) \quad (5)$$

A resolução, por um método numérico, das equações diferenciais e o posterior processamento dos resultados obtidos permite quantificar os valores esperados (médios) de  $H$  e  $\bar{\mathbf{q}}$ , tendo em conta a variabilidade espacial da transmissividade. Trata-se de uma abordagem simples, uma vez que apenas exige o conhecimento da média geométrica da transmissividade. Contudo, não permite a avaliação da incerteza dos resultados obtidos, por exemplo, através da quantificação da variância de  $H$  ou  $\bar{\mathbf{q}}$ .

### 3.2 - Transmissividade estimada por krigagem ordinária ( $T_{krig}$ )

A partir de uma amostra de valores da transmissividade, espacialmente distribuídos de uma forma aleatória, é possível estimar o valor da transformada  $Y = \ln(T)$  em qualquer ponto do domínio por combinação linear dos  $N$  valores  $Y_i$  conhecidos:

$$Y^*(\bar{\mathbf{x}}) = \sum_i^N \lambda_i(\bar{\mathbf{x}}) Y_i \quad (6)$$

sendo os coeficientes da combinação linear função do ponto onde se pretende estimar o valor de  $Y$ . O vector  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$  é determinado resolvendo o sistema de  $N+1$  equações

$$\begin{aligned} \sum_i^N \lambda_i \gamma_Y(\bar{\mathbf{x}}_i - \bar{\mathbf{x}}_j) - \mu &= \gamma_Y(\bar{\mathbf{x}}_i - \bar{\mathbf{x}}) & j=1, \dots, N \\ \sum_i^N \lambda_i &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

que constitui a base da krigagem ordinária. A variância do erro de estimação,  $\sigma_{krig}^2$ , é calculada por:

$$\sigma_{krig}^2 = \text{Var} \left( \sum_i^N \lambda_i Y_i - Y \right)$$

Tal como na abordagem anterior, a resolução das equações diferenciais permite  $\bar{\mathbf{q}}$ , tendo em conta a variabilidade espacial da krigagem. E continua a não ser possível avaliar a incerteza dos  $\bar{\mathbf{q}}$ .

#### transmissividade ( smcc

A simulação  $Y = \ln(T)$  é o processo de gerar diferentes,

$$\{y^{(r)}(\bar{\mathbf{x}}) \mid \bar{\mathbf{x}} \in \Omega\}, \quad r = 1, 2, \dots \quad (9)$$

Estas realizações tomam a designação de *condicionadas* se respeitaram os dados conhecidos  $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_N\}$ :

$$y^{(r)}(\bar{\mathbf{x}}_i) = Y(\bar{\mathbf{x}}_i), \quad \forall_r \quad (10)$$

Caso não os respeitem designam-se por *não condicionadas*.

As realizações, condicionadas ou não, deverão reproduzir determinados parâmetros estatísticos e de correlação espacial (a média  $m_Y$ , a variância  $\sigma_Y^2$ , o efeito pepita  $w$ , a distância integral  $I_Y$  e o tipo de semivariograma). Nos exemplos em análise neste trabalho as

simulações condicionadas foram geradas pelo algoritmo sequencial gaussiano proposto em DEUTSCH e JOURNAL (1992).

#### 4 - TRANSMISSIVIDADE “REAL”

As duas distribuições da transmissividade adoptadas como reais foram produzidas a partir de uma realização de uma função aleatória, gerada por “recozimento simulado” para os seguintes parâmetros estatísticos:  $m_X = 0$ ,  $\sigma_X^2 = 1$ ,  $w = 0$  e  $I_X = 2000m$  (semivariograma exponencial). Multiplicando os valores de X pelo desvio padrão pretendido para Y e centrando os novos valores em torno de  $m_Y = \ln(2000)$ , obtiveram-se duas distribuições de  $Y = \ln(T)$  cujas imagens são apresentadas nas Figuras 2 e 3.

Os valores da transmissividade nos 55 pontos assinalados constituem as amostras que permitem estimar o comportamento de T, nas abordagens alternativas já descritas. Os respectivos histogramas e semivariogramas experimentais são apresentados na Figura 1. Nos gráficos dos semivariogramas encontram-se representados os modelos teóricos adoptados para gerar as transmissividades “reais” e a estimação por krigagem.

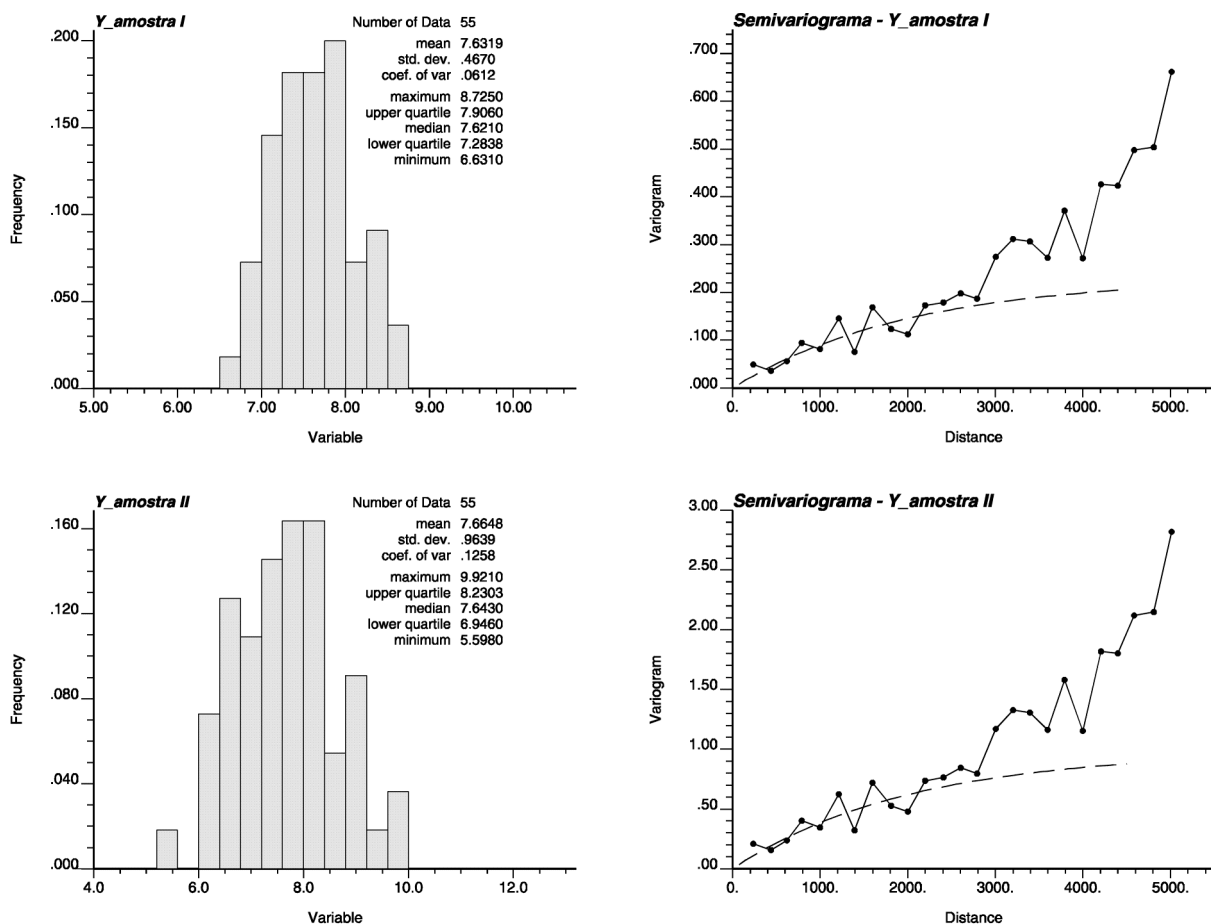


Figura 1: Transmissividade real ( $Y = \ln T$ ). Histogramas e Semivariogramas experimentais.

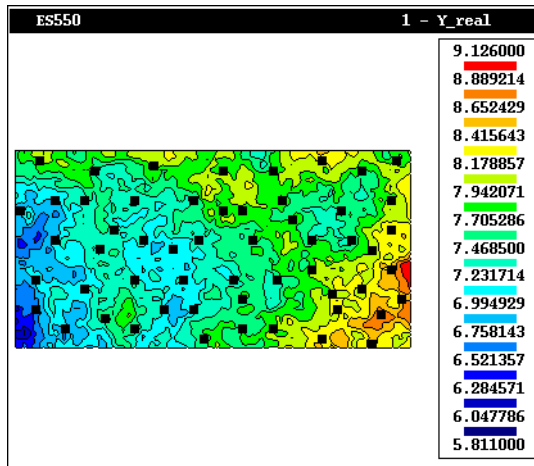


Figura 2: Transmissividade real I ( $Y=\ln T$ )

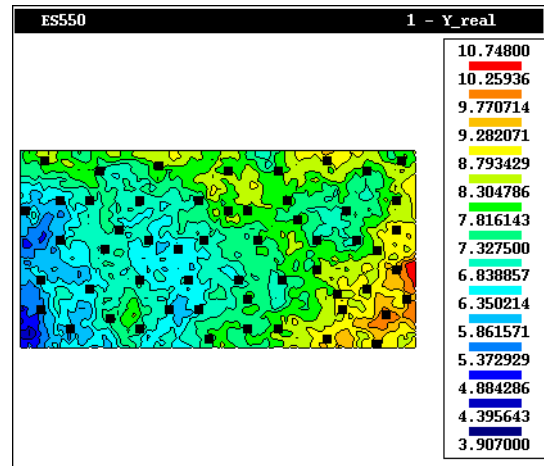


Figura 3: Transmissividade real II ( $Y=\ln T$ )

## 5 - ESTIMAÇÃO DA TRANSMISSIVIDADE A PARTIR DAS AMOSTRAS

### 5.1 - Transmissividade efectiva ( $T_{ef}$ )

Os valores “efectivos” da transmissividade determinaram-se a partir das duas amostras (Quadro 1).

**Quadro 1**

Valores efectivos da transmissividade

Transmissividade	$m_Y$	$T_{ef} = T_G$ (m <sup>2</sup> /d)
<b>I</b>	7.6319	2062.97
<b>II</b>	7.6648	2131.97

### 5.2 - Transmissividade obtida por krigagem ( $T_{krig}$ )

Para estimar a transmissividade, por krigagem ordinária, utilizaram-se os dados da amostra localizados na vizinhança de cada ponto a estimar. Desta vizinhança, móvel, foram seleccionados os dados mais próximos do ponto a calcular (no mínimo 4 e no máximo 16), contidos num raio de 2000 metros. Nas Figuras 4 e 5 apresentam-se a distribuição estimada de  $Y = \ln(T)$  e a variância do respectivo erro. Os parâmetros estatísticos considerados para a krigagem de  $Y = \ln(T)$  são os do Quadro 2.

**Quadro 2**

Krigagem. Semivariogramas teóricos.

Transmissividade	Semivariograma	$\sigma_Y^2$	$w$	$I_Y$ (m)
<b>I</b>	Exponencial	0.218	0.0	2000
<b>II</b>	Exponencial	0.929	0.0	2000

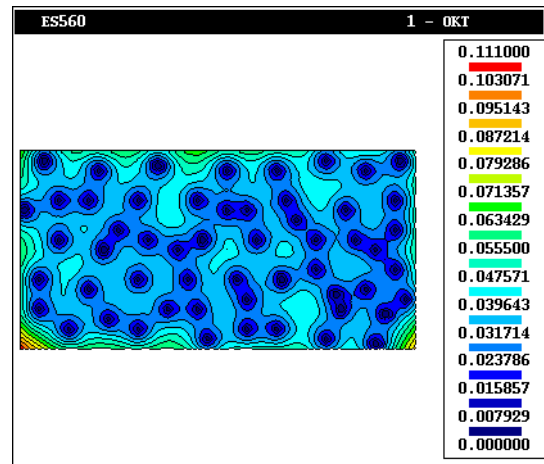
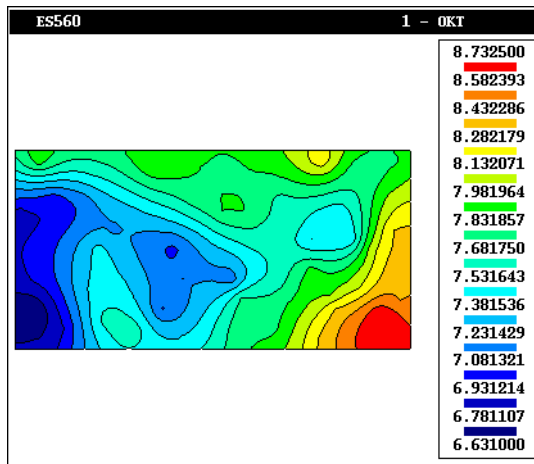


Figura 4: Transmissividade I - Krigagem de  $Y = \ln T$ ; Variância do erro de estimação.

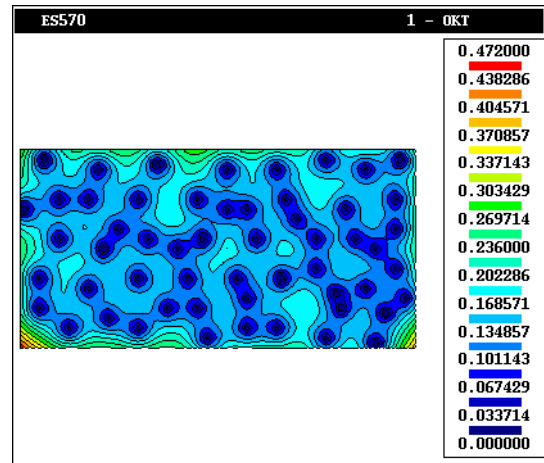
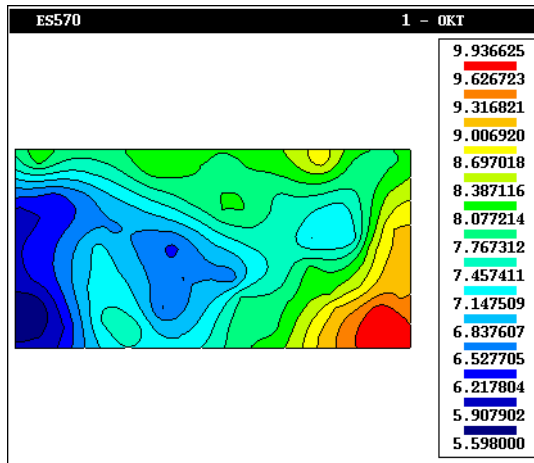


Figura 5: Transmissividade II - Krigagem de  $Y = \ln T$ ; Variância do erro de estimação.

### 5.3 - Realizações condicionadas da transmissividade ( $T_{smcc}$ )

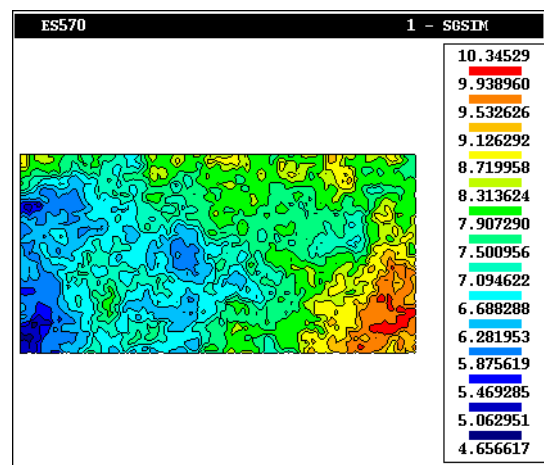
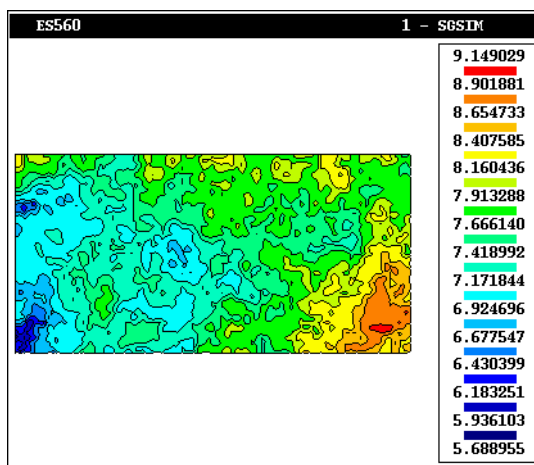


Figura 6: Transm. I ( $Y = \ln T$ ). Realização 100.

Figura 7: Transm. II ( $Y = \ln T$ ). Realização 100.

As simulações de Monte-Carlo foram produzidas com base em 300 realizações condicionadas da transmissividade. O algoritmo sequencial gaussiano transforma  $T$  numa variável normal padrão ( $m = 0$ ,  $\sigma^2 = 1$ ), à custa da função de distribuição de probabilidade experimental obtida a partir dos valores da amostra ordenados por ordem crescente. Para o semivariograma teórico desta nova variável adoptou-se o mesmo tipo (exponencial) e a mesma distância integral ( $I_Y = 2000\text{m}$ ) da krigagem. Nas Figuras 6 e 7 são apresentadas, a título exemplificativo, uma realização condicionada de cada transmissividade.

## 6 - EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Nos problemas aqui apresentados o escoamento é determinado pela imposição da carga hidráulica em duas fronteiras opostas (100 m em  $\Gamma_1$  e 94 m em  $\Gamma_3$ ) e por uma recarga superficial (2 mm/d). As outras duas fronteiras ( $\Gamma_2$  e  $\Gamma_4$ ) são consideradas impermeáveis. O ensaios ES760 e ES770 correspondem, respectivamente, às transmissividades **I** e **II**.

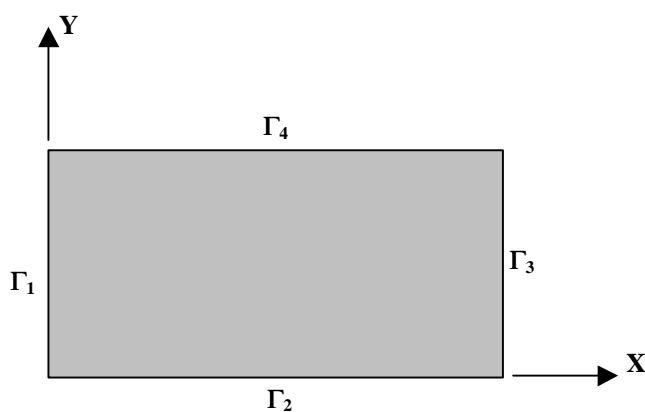


Figura 8: Geometria do domínio (aquífero)

### 6.1 - Ensaio ES760

As Figuras 9 a 11 permitem visualizar o valor esperado (médio) de  $H$  para cada uma das abordagens anteriormente descritas. Na Figura 12 apresenta-se o valor “real” da carga hidráulica. As Figuras 13 e 14 apresentam a diferença entre os resultados obtidos por krigagem e simulações de Monte-Carlo, por um lado, e os valores “reais” de  $H$ , por outro. Na Figura 15 observa-se a diferença entre os valores da carga hidráulica estimados por krigagem e simulações de Monte-Carlo. Finalmente, na Figura 16, regista-se a variância de  $H$ , também estimada por este último método. No Quadro 3 comparam-se os caudais totais esperados (médios) nas fronteiras permeáveis, onde se fixou o valor de  $H$ .

**Quadro 3**

ES760 → Caudais totais médios nas fronteiras  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_3$ . Desvio relativamente a  $T_{\text{real}}$ .

	$T_{\text{real}}$	$T_{\text{krig}}$	<i>desvio (%)</i>	$T_{\text{smcc}}$	<i>Desvio (%)</i>	$T_{\text{ef}}$	<i>desvio (%)</i>
$\langle Q_T \rangle_{\Gamma_1}$ (m <sup>3</sup> /d)	+ 8783	+ 8989	+ 2.3	+ 9028	+ 2.8	+ 11811	+ 34.5
$\langle Q_T \rangle_{\Gamma_3}$ (m <sup>3</sup> /d)	+ 27217	+ 27011	- 0.8	+ 26972	- 0.9	+ 24189	- 11.1

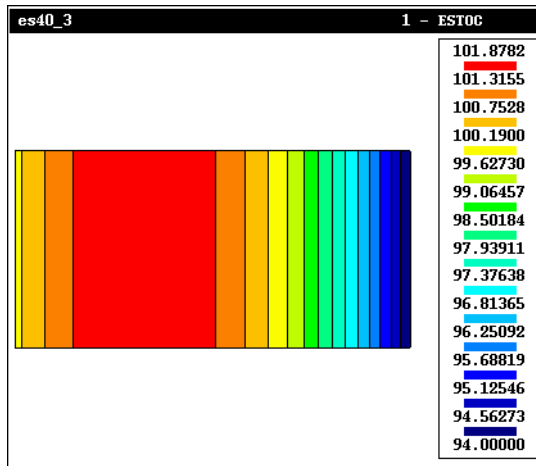


Figura 9:  $T_{ef} \rightarrow$  Valor médio de H (m).

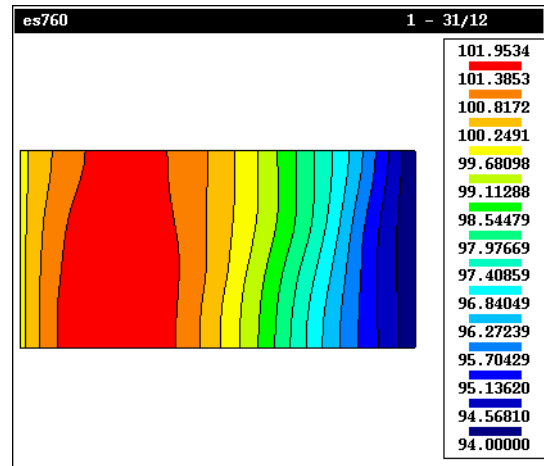


Figura 10:  $T_{krig} \rightarrow$  Valor médio de H (m).

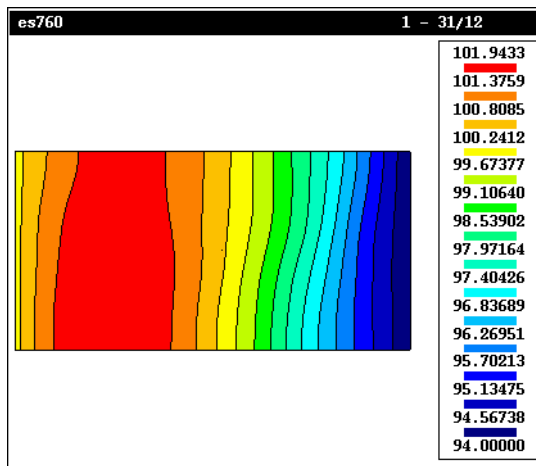


Figura 11:  $T_{smcc} \rightarrow$  Valor médio de H (m).

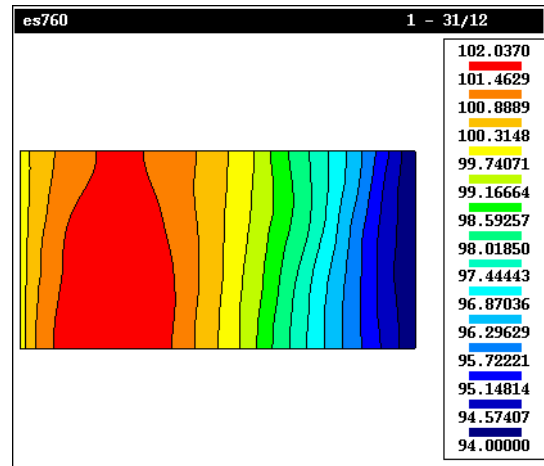


Figura 12:  $T_{real} \rightarrow$  Valor "real" de H (m).

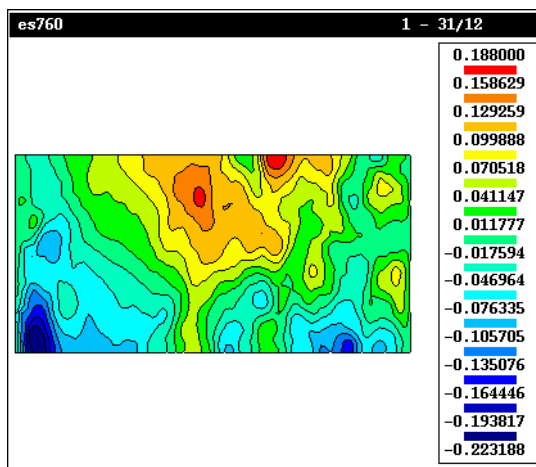


Figura 13:  $\langle H_{krig} \rangle - H_{real}$  (m).

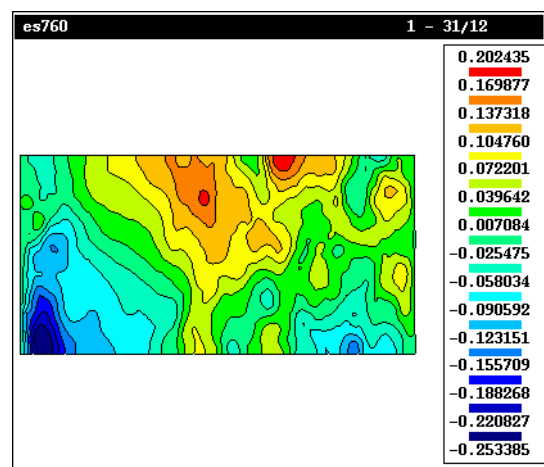


Figura 14:  $\langle H_{smcc} \rangle - H_{real}$  (m).

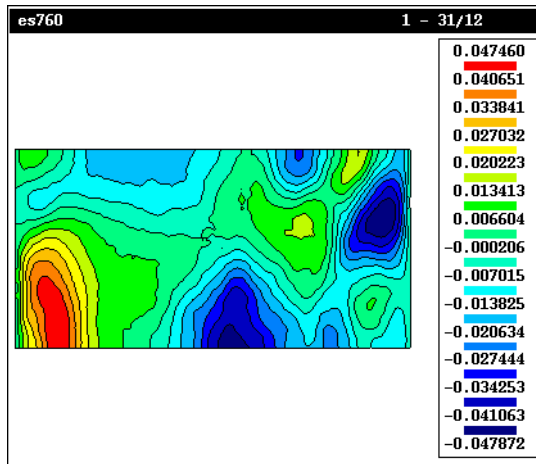


Figura 15:  $\langle H_{\text{krig}} \rangle - \langle H_{\text{smcc}} \rangle$  (m).

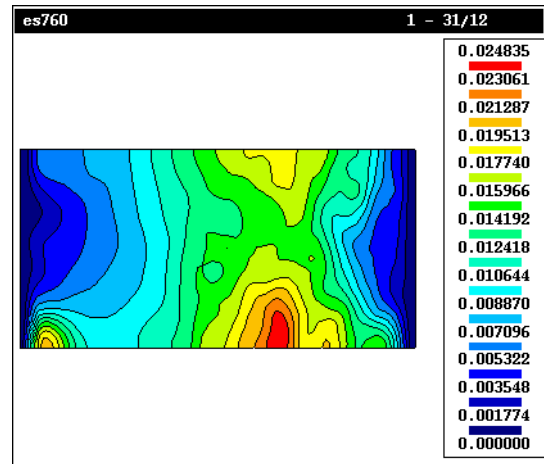


Figura 16:  $T_{\text{smcc}} \rightarrow$  Variância de H ( $\text{m}^2$ ).

## 6.2 - Ensaio ES770

Quadro 4

ES770  $\rightarrow$  Caudais totais médios nas fronteiras  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_3$ . Desvio relativamente a  $T_{\text{real}}$ .

	$T_{\text{real}}$	$T_{\text{krig}}$	desvio (%)	$T_{\text{smcc}}$	Desvio (%)	$T_{\text{ef}}$	desvio (%)
$\langle Q_T \rangle_{\Gamma_1}$ ( $\text{m}^3/\text{d}$ )	+ 6462	+ 6788	+ 5.0	+ 6936	+ 7.3	+ 11604	+ 79.6
$\langle Q_T \rangle_{\Gamma_3}$ ( $\text{m}^3/\text{d}$ )	+ 29538	+ 29212	- 1.1	+ 29064	- 1.6	+ 24396	- 17.4

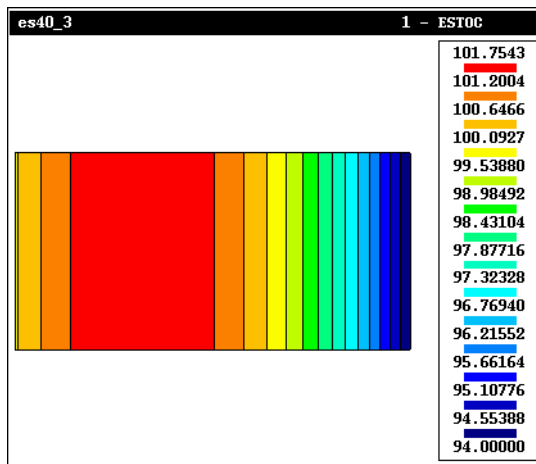


Figura 17:  $T_{\text{ef}} \rightarrow$  Valor médio de H (m).

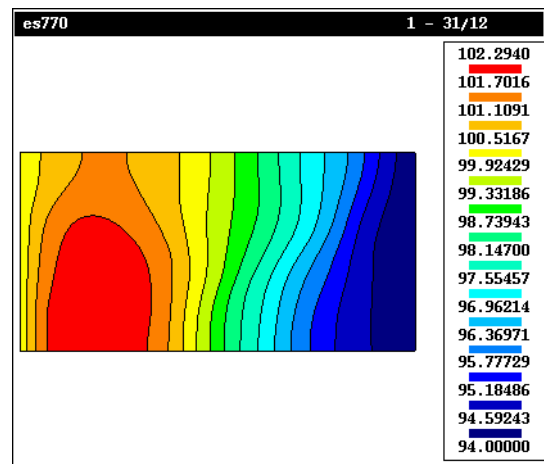


Figura 18:  $T_{\text{krig}} \rightarrow$  Valor médio de H (m).

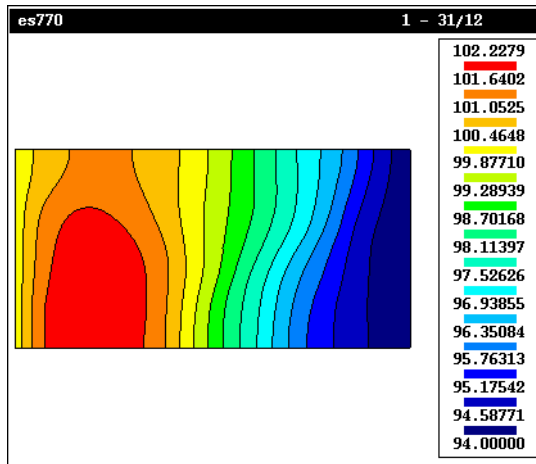


Figura 19:  $T_{smcc} \rightarrow$  Valor médio de H (m).

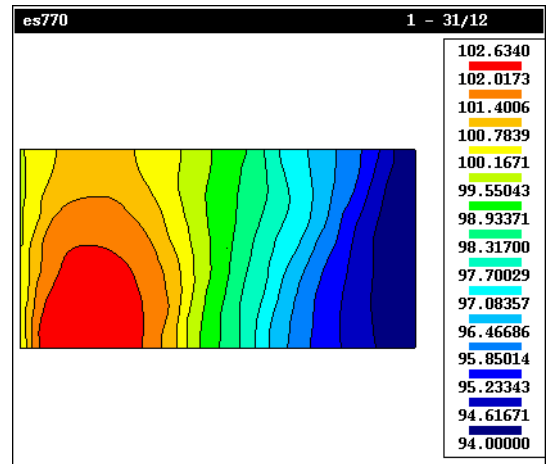


Figura 20:  $T_{real} \rightarrow$  Valor "real" de H (m).

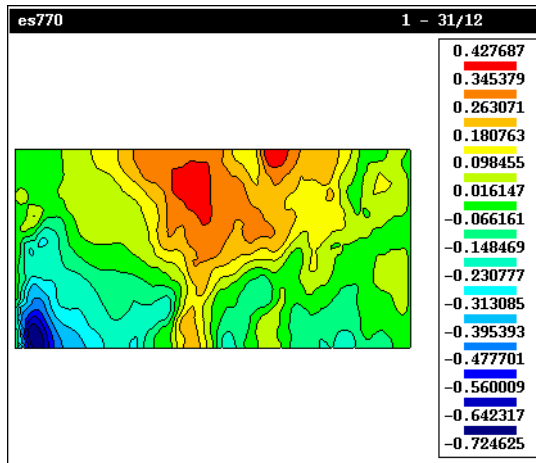


Figura 21:  $\langle H_{krig} \rangle - H_{real}$  (m).

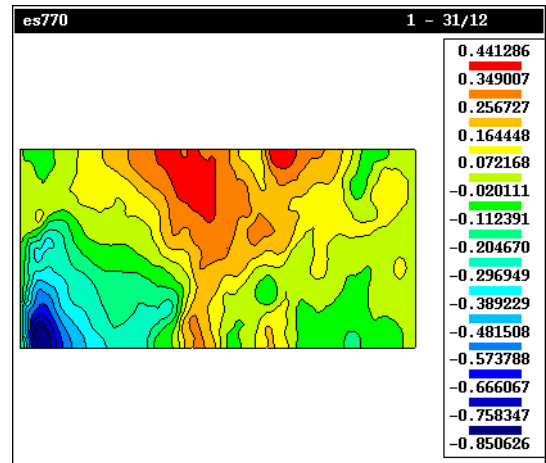


Figura 22:  $\langle H_{smcc} \rangle - H_{real}$  (m).

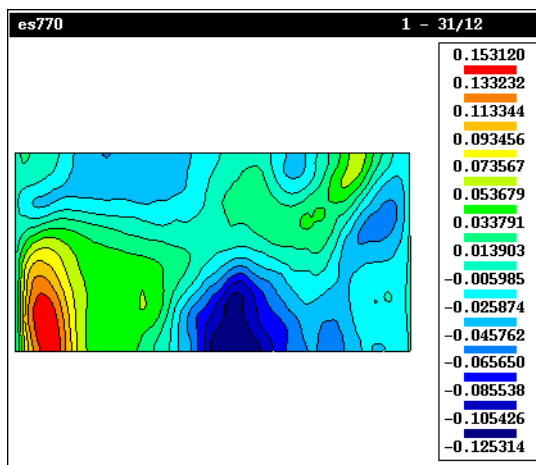


Figura 23:  $\langle H_{krig} \rangle - \langle H_{smcc} \rangle$  (m).

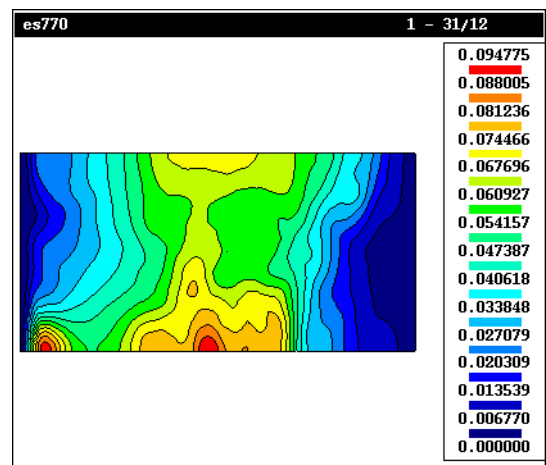


Figura 24:  $T_{smcc} \rightarrow$  Variância de H ( $m^2$ ).

As Figuras 17 a 24 e o Quadro 4 proporcionam análises idênticas às referidas para o ensaio ES760.

## 7 - ANÁLISE DOS RESULTADOS

A observação dos resultados obtidos com a transmissividade “efectiva” ( $T_{ef}$ ), a transmissividade estimada por krigagem ( $T_{krig}$ ) e as simulações de Monte-Carlo efectuadas com base em realizações condicionadas da transmissividade ( $T_{smcc}$ ), e a respectiva comparação com os valores correspondentes à distribuição “real” permitem alguns comentários:

- a) A simulação do escoamento com base na transmissividade “efectiva” não proporciona uma boa aproximação à solução “real” do problema, tanto para a carga hidráulica como para os caudais totais nas fronteiras. Uma comparação visual entre as Figuras 9 e 12 (ensaio ES760) ou entre as Figuras 17 e 20 (ensaio ES770) comprova-o no que respeita à carga hidráulica. O mesmo se conclui quanto aos caudais totais nas fronteiras da análise dos Quadros 3 (ensaio ES760) e 4 (ensaio ES770). O mesmo se poderia concluir quanto à utilização de simulações de Monte-Carlo condicionadas, uma vez que os resultados seriam idênticos.
- b) A modelação com base na transmissividade obtida por krigagem e as simulações de Monte-Carlo apresentam, face à solução “real”, um comportamento razoável no que respeita aos valores estimados para  $H$  e  $Q_T$ . Também se observa que a distribuição espacial das diferenças (positivas e negativas) é análoga para as duas abordagens. É ainda de salientar o facto de, comparando as Figuras 13 e 14 (ensaio ES760) ou as Figuras 21 e 22 (ensaio ES770), se constatar que  $\langle H_{krig} \rangle$  apresenta menores diferenças para  $H_{real}$  do que a carga hidráulica estimada por simulações de Monte-Carlo,  $\langle H_{smcc} \rangle$ .
- c) O comportamento da variância de  $H$ ,  $\sigma_H^2$ , calculada a partir das simulações de Monte-Carlo, é condicionado pela proximidade às fronteiras. Naquelas onde  $H$  é imposto anula-se, e tende a aumentar ligeiramente junto às fronteiras impermeáveis. Ao contrário do que sucede em simulações não condicionadas, não é muito evidente a influência do gradiente hidráulico na grandeza da variância. Esta aparenta ser mais influenciada por particularidades locais da transmissividade, para além da já referida proximidade às fronteiras.
- d) Não é possível detectar uma relação evidente entre a grandeza de  $\sigma_H^2$  e as diferenças  $\langle H_{smcc} \rangle - H_{real}$  (ou  $\langle H_{krig} \rangle - H_{real}$ ), mesmo quando se analisa o módulo do desvio relativo,  $|\langle H_{smcc} \rangle - H_{real}| / H_{real} \times 100\%$ , e se compara com  $\sigma_H^2$  (Figuras 25 e 26). De facto, é possível observar diferenças maiores onde a variância é pequena e vice-versa.

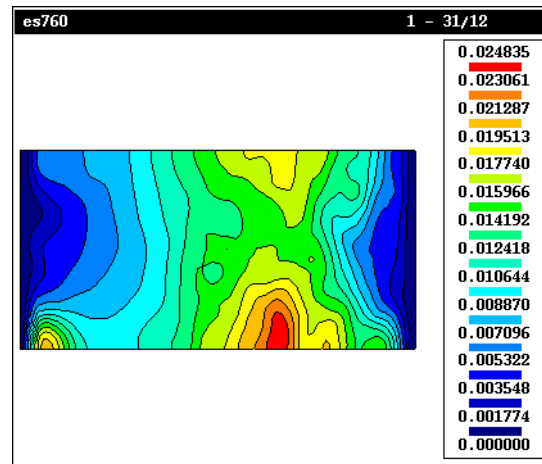
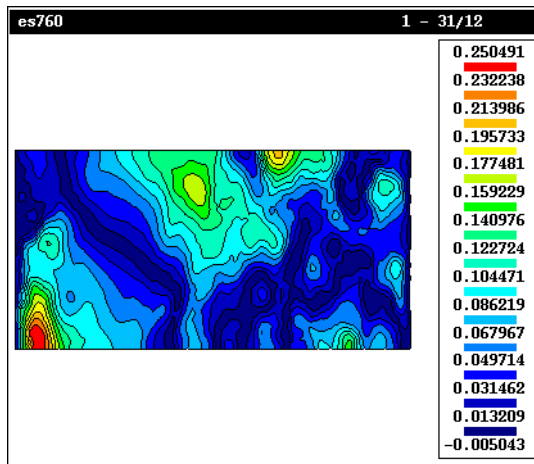


Figura 25: ES760  $\rightarrow |\langle H_{smcc} \rangle - H_{real}| / H_{real} \times 100\%$  vs. variância de H (m<sup>2</sup>).

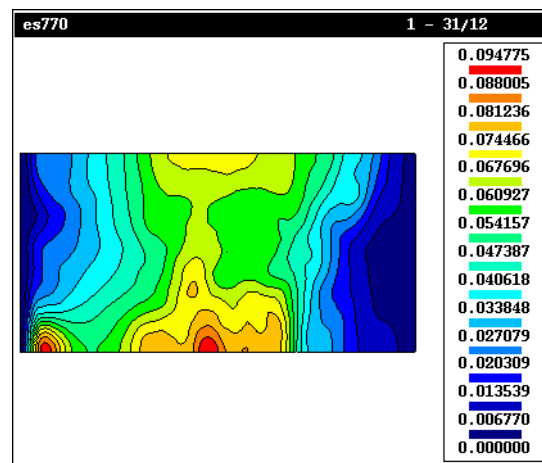
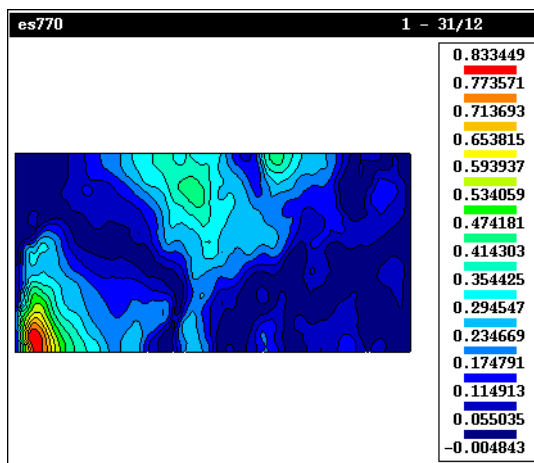


Figura 26: ES770  $\rightarrow |\langle H_{smcc} \rangle - H_{real}| / H_{real} \times 100\%$  vs. variância de H (m<sup>2</sup>).

## 8 - CONCLUSÕES

Tendo sido os objectivos deste trabalho expor vários modos de modelar o escoamento, tomando em consideração a variabilidade espacial da transmissividade, e proceder a uma comparação com os resultados de uma simulação “real”, importa retirar algumas conclusões.

A primeira consiste em considerar inconveniente a modelação do escoamento com base no designado “valor efectivo” da transmissividade quando existirem dados geograficamente localizados. De facto, uma adequada análise estrutural dos dados permitirá uma estimativa da transmissividade por krigagem, com base na qual se poderá simular numericamente o escoamento e obter melhores resultados.

Caso se pretenda estimar as variáveis em jogo e, simultaneamente, avaliar a incerteza associada dever-se-á optar pelas simulações de Monte-Carlo condicionadas aos dados disponíveis. Este método, apesar de um exigir um grande esforço computacional, tem a

vantagem de ser conceptualmente simples e versátil, na medida em que reconhece “automaticamente” as características dos problemas, tais com a geometria do domínio e as condições fronteira.

Finalmente, importa referir que as amostras de transmissividades utilizadas nestes exemplos apresentam uma boa cobertura do domínio, quer em número de dados quer na distribuição espacial destes. Contudo, questões como a diminuição da distância integral da transmissividade para os mesmos pontos amostrados ou a redução do número de dados e as correspondentes implicações na perda de qualidade dos resultados não são aqui tratadas. Também não é analisada a incerteza dos parâmetros estatísticos obtidos ou adoptados a partir das amostras ( $m_Y$ ,  $\sigma_Y^2$ ,  $w$ ,  $I_Y$ ) e a consequente implicação na incerteza dos resultados obtidos.

## BIBLIOGRAFIA

- DAGAN, G. - “Statistical Theory of Groundwater Flow and Transport: Pore to Laboratory, Laboratory to Formation and Formation to Regional Scale”, *Water Resources Research*, 22, 120S-135S, 1986.
- DAGAN, G. - *Flow and Transport in Porous Formations*. Springer-Verlag, Berlim, 1989.
- DEUTSCH, C. V., JOURNEL, A. G. - *GSLIB. Geostatistical Software Library and User's Guide*, New York, Oxford University Press, 1992.
- FIGUEIREDO, M. M. P. - *Escoamentos Transitórios em Meios Porosos. Uma Análise pelo Método dos Elementos Finitos*. Relatório para provas de Aptidão Pedagógica e Capacidade Científica (art. 58º do ECDU), Porto, FEUP, 1990.
- GELHAR, L. W. - *Stochastic Subsurface Hydrology*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1993.
- MARSILY, G. - *Quantitative Hydrogeology. Groundwater Hydrology for Engineers*, San Diego, Academic Press, 1986.
- SAMPER, F. J., CARRERA, J., *Geoestadística: Aplicaciones a la Hidrogeología Subterránea*. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Barcelona, Universitat Politècnica de Catalunya, 1990.
- ZIENKIEWICS, O. C., MORGAN, K., *Finite Elements and Approximation*, New York, John Wiley and Sons, 1983.