



ASSOCIAÇÃO PORTUGUESA DOS RECURSOS HÍDRICOS



ABES ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE  
ENGENHARIA SANITÁRIA E AMBIENTAL

Iº SIMPÓSIO LUSO-BRASILEIRO DE  
ENGENHARIA SANITÁRIA E AMBIENTAL

SISTEMAS DE PRODUÇÃO E DISTRIBUIÇÃO DE ÁGUA  
"MODELAÇÃO MATEMÁTICA PARA OPERAÇÃO DE  
ABASTECIMENTO DE ÁGUA"

PROF. ENGº JORGE LUIZ PAES RIOS

Engº Hidráulico e Sanitarista - EEUFRJ - 1970

D.E.A. Université de Grénoble - INSH - 1979

Coordenador de Projetos da ENGEVIX S.A. - desde 1980

Prof. Titular da Univ. Católica de Petrópolis - desde 1971

Rio de Janeiro - BRASIL

RESUMO

Para o Plano Diretor de Abastecimento de Água do Rio de Janeiro foi desenvolvido um sistema para computador, designado por ENGEHID, que tem por finalidade a montagem de modelos matemáticos de malha hidráulica com configuração complexa. O trabalho apresenta a formulação matemática do sistema, que utiliza o método iterativo de Newton-Raphson, para solução das expressões matemáticas de simulação além das condições de contorno utilizadas na modelagem.

Nas condições de contorno o sistema admite a utilização de múltiplas fontes (reservatórios, estações elevatórias e/ou interligações com outros sistemas de abastecimento), estações elevatórias do tipo "booster", inseridas nas linhas em número qualquer, e válvulas reguladas, também em número qualquer, tanto em linhas com comprimento longo como com comprimento curto. Quanto ao tipo de sistema hidráulico de distribuição de água, o mesmo poderá ser malhado e/ou ramificado com qualquer complexidade. Neste trabalho são descritas a formulação matemática do sistema, as condições de contorno e os dados requeridos e apresentado um exemplo, com os resultados obtidos.

Foi desenvolvido para o Plano Diretor de Abastecimento de Água da Região Metropolitana do Rio de Janeiro um sistema para computador que tem por finalidade a montagem de modelos matemáticos de malha hidráulica com configuração complexa. O trabalho apresenta a formulação matemática do sistema, que utiliza o método iterativo de Newton-Raphson, para solução das expressões matemáticas de simulação além das condições de contorno utilizadas na modelagem. As expressões matemáticas são as usuais em hidráulica e que, por não serem lineares, requerem um método iterativo para sua solução. Nas condições de contorno o sistema admite a utilização de múltiplas fontes (reservatórios, estações elevatórias e/ou interligações com outros sistemas de abastecimento), estações elevatórias do tipo "booster", inseridas nas linhas em número qualquer, e válvulas reguladas, também em número qualquer, tanto em linhas com comprimento longo como com comprimento curto. Quanto ao tipo de sistema hidráulico de distribuição de água, o mesmo poderá ser malhado e/ou ramificado com qualquer complexidade. Neste trabalho são descritas a formulação matemática do sistema, as condições de contorno e os dados requeridos e apresentado um exemplo, com os resultados obtidos. Este sistema está estruturado de uma forma muito simples, pois permite a sua operação via terminal e não requer do usuário conhecimento detalhado do mesmo. Esta versatilidade torna o Sistema extremamente útil na montagem de modelos que têm por finalidade o planejamento e a operação de Sistemas de Abastecimento de Água complexos, podendo funcionar isoladamente ou acoplado com um Centro de Operações dotado de telemedição e telecomando.

No âmbito deste trabalho é também apresentado o diagrama de blocos resumido, que traduz a estrutura básica do sistema e o resultado que se pode esperar do mesmo. É importante assinalar que a correta simulação é uma função direta da qualidade dos dados de entrada, pois um sistema que recebe dados inadequados tem sua solução desviada da desejada, cabendo, então, aos engenheiros que estão operando o sistema terem os devidos cuidados para que tal não aconteça.

Como segurança final, para que o sistema possa realmente simular uma malha hidráulica física existente, é apresentada metodologia para aferição do modelo matemático. Após serem levantados os dados físicos disponíveis (cotas topográficas, demandas, comprimentos e diâmetros das linhas, etc.), o modelo deve ser aferido, ocasião em que será verificada sua aproximação com a realidade. Somente depois de calibrado e considerado como válido é que poderão ser feitas as previsões de novas configurações operacionais ou de planejamento técnico de ampliações de malha.

Finalmente, deve-se chamar a atenção para o fato de que a rotina de atualização do modelo deve ser uma atividade permanente, onde as novas informações obtidas são incorporadas ao sistema, para melhorar sua representatividade e, portanto, a qualidade de seus resultados.

Os modelos matemáticos, uma vez implantados e aferidos por este sistema, constituem um poderoso instrumento de planejamento e também, de operação, podendo fornecer, em pouco tempo, resposta correta a qualquer situação, real ou hipotética, com a qual possam se deparar os técnicos responsáveis.

## 2 - FORMULAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO

### 2.1 - EXPRESSÃO MATEMÁTICA DE SIMULAÇÃO

A fórmula de Hazen-Williams é amplamente utilizada em problemas de transporte de água em condutos forçados e é expressa por:

$$V = KCR^{0,63} S^{0,54} \dots\dots\dots (1)$$

onde:

- V - velocidade média do escoamento, em metros por segundo;
- C - coeficiente de atrito, que é função da natureza das paredes dos tubos (material, tempo de uso e estado) e de outros fatores;
- R - raio hidráulico, em metros;
- S - gradiente de energia (perda de carga unitária), em metro por metro; e,
- K - coeficiente.

Para condutos circulares a equação (1) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$V = 0,355 CD^{0,63} J^{0,54} \dots\dots\dots (2)$$

onde:

- D - diâmetro da tubulação, em metros;
- J - perda de carga unitária, em metro por metro;

A perda de carga total (H) na tubulação pode ser calculada por:

$$H = J.L = \phi . Q^{1,852} \dots\dots\dots (3)$$

onde:

H - perda de carga total na tubulação, em metros;

L - comprimento da tubulação, em metros;

$\phi$  - coeficiente igual a  $\frac{10,643 \cdot L}{C^{1,852} D^{4,87}}$  ;

Q - vazão, em metros cúbicos por segundo.

2.2 - MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

Quando uma equação  $f(x) = 0$  pode ser escrita na forma  $x = \phi(x)$ , valores aproximados para suas raízes podem ser geralmente obtidos através de processos iterativos de aproximações sucessivas.

Nas equações em que a derivada de  $f(x)$  é uma expressão simples e de fácil obtenção, as raízes de  $f(x) = 0$  podem ser determinadas pelo conhecido método de Newton-Raphson, que se tem mostrado adequado para este tipo de solução de equações algébricas.

A expressão geral do método de Newton-Raphson pode ser escrita:

$$x^{(n)} = x^{(n-1)} - \frac{f(x^{(n-1)})}{f'(x^{(n-1)})} \dots\dots\dots (4)$$

A Figura 1 mostra a representação gráfica do método de Newton-Raphson. Os passos do processo são os seguintes: em  $x_0$  obtém-se a derivada da função (tangente); sua interseção com o eixo dos "x" é o valor de  $x^{(1)}$ . Em  $x^{(1)}$  é determinado o valor da função  $P_1$ . Novamente em  $P_1$  é tirada a tangente da função neste ponto, que interceptará o eixo dos "x" no valor de  $x^{(2)}$  e assim sucessivamente, até que seja determinada a raiz da função.

2.2.3 - Convergência do Processo Iterativo

A convergência para a solução da função  $f(x) = 0$  poderá ser lenta, rápida ou não convergir, dependendo da natureza das funções às quais se aplica o processo iterativo.

A aplicação de um fator de aceleração de convergência na expressão matemática que representa o fenômeno hidráulico (escoamento em conduto forçado sob pressão) resulta numa variação do número de iterações necessárias, conforme apresentado na Figura 2.

2.2.4 - Aplicação do Método de Newton-Raphson na Equação de Hazen-Williams

Seja o nó "j" com nível piezométrico "P<sub>j</sub>" ligado ao nó "i" com nível piezométrico "P<sub>i</sub>", tal que:

$$P_i - P_j = \Delta P_{ij} \dots\dots\dots (5)$$

representa a perda de carga no trecho "ij" entre os nós e "ij" a perda unitária (gradiente de energia). Admita-se que para um determinado nó "j" convirjam "n" linhas, conforme ilustrado na Figura 3, onde M<sub>j</sub> é o consumo localizado.

Pela equação de continuidade no nó pode-se escrever:

$$F_{ji} = \sum_{i=1}^n Q_{ji} + M_j = 0 \dots\dots\dots (6)$$

sendo:

$$Q_{ji} = KC_{ji} D_{ji}^{2,63} L_{ji}^{-0,54} \frac{P_j - P_i}{|\Delta P_{ji}|^{0,46}} \dots\dots\dots (7)$$

Fazendo:

$$R_{ji} = KC_{ji} D_{ji}^{2,63} L_{ji}^{-0,54} \dots\dots\dots (8)$$

e aplicando na equação (6), que após ser derivada em relação a P<sub>j</sub>, tem-se:

$$\frac{\partial F_j}{\partial P_j} = \sum_{i=1}^n \frac{0,54 R_{ji}}{|\Delta P_{ji}|^{0,46}} \dots\dots\dots (9)$$

a equação (9), aplicada à equação (4) do método de Newton-Raphson, oferece:

$$P_j^{n+1} = P_j^n - \frac{F_j}{\sum_{i=1}^n \frac{0,54 R_{ji}}{|\Delta P_{ji}|^{0,46}}} \dots\dots\dots (10)$$

que representa a enésima iteração do método.

2.3 - MODELAGEM MATEMÁTICA

Uma malha hidráulica, com qualquer nível de complexidade, pode esquematicamente ser representada por um sistema de nós e linhas, onde os nós representam as interseções ou junções das linhas, conforme representado na Figura 3. A equação de continuidade no nó "j" é semelhan-

te  $\tilde{a}$  (6), sendo que para "N" nós de uma malha, tem-se:

$$F_j = \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^N Q_{ji} + M_j = 0 \dots\dots\dots (11)$$

onde  $J = 1, 2, \dots, N$

Sendo  $M_j =$  consumo no nó "j" e  $Q_{ji} = 0$  se não existe linha do nó "j" para o nó "i".

A equação (função do nível piezométrico) em cada nó "j" é definida por:

$$F_j (P_1, P_2, \dots, P_N) = 0 \dots\dots\dots (12)$$

onde  $j = 1, 2, \dots, N$

De acordo com o exposto anteriormente, os elementos de correção são as seguintes equações:

$$\frac{\partial F_j}{\partial P_j} (P_1, P_2, \dots, P_N) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \frac{0,54 R_{ij}}{|P_i - P_j|^{0,46}} \dots\dots\dots (13)$$

A correção aplicada, conforme a equação acima, em todos os nós de malha hidráulica, apresenta um sistema de equações de correção dos níveis piezométricos com a seguinte forma genérica:

$$P_j^{n+1} = P_j^n - \frac{F_j}{\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \frac{0,54 R_{ij}}{|P_i - P_j|^{0,46}}} \dots\dots\dots (14)$$

onde "n" representa a enésima iteração e "N" o número de nós da malha hidráulica (número de equações).

Com a finalidade de acelerar a convergência da resolução das equações simultâneas utiliza-se um fator de aceleração de convergência. Após ser calculado o valor diferencial de nível piezométrico ( $F_j / \partial F_j / \partial P_i$ ), verifica-se o sinal em relação à correção anterior. Caso os sinais sejam iguais, ou seja, caso haja convergência na mesma direção, multiplica-se o valor encontrado por um fator de aceleração de convergência, sendo que este fator é sempre  $< 1$ . Caso sejam sinais contrários, ou seja, caso esteja oscilando em torno da solução, divide-se pelo fator de convergência. O fator adequado para o modelo matemático deve ser determinado a partir de análise de sensibilidade do sistema

## 2.4 - CONDIÇÕES DE CONTORNO

### 2.4.1 - Fontes de Suprimento

A malha hidráulica deve ter pelo menos um ponto onde o sistema recebe a água para distribuir nos pontos de demanda. As fontes de suprimento poderão ser:

- . reservatórios
- . estações elevatórias e/ou
- . ligações com outros sistemas.

### 2.4.2 - Estações Elevatórias Integradas nas Malhas Hidráulicas

Uma malha hidráulica complexa deve levar em conta a possibilidade da existência de estações elevatórias do tipo "booster", inseridas em algumas de suas linhas.

### 2.4.3 - Registro Graduado

#### a) - Registro em Tubo Longo

Neste item trata-se da simulação matemática de um registro graduado numa linha de comprimento longo. A equação (2) pode ser escrita na forma:

$$H = \phi Q^{1,85} \dots\dots\dots (15)$$

ou seja, a perda de carga total numa tubulação de características " $\phi$ " e vazão "Q".

A perda de carga localizada, devido ao fechamento parcial de um registro, pode ser obtida pela expressão:

$$h_r = \frac{KV^2}{2g} = \frac{16 k}{\pi^2 D^4 2g} Q^2 \dots\dots\dots (16)$$

Se:

$$R_1 = \frac{8 k}{\pi^2 D^4 g} \dots\dots\dots (17)$$

tem-se então:

$$h_r = R_1 Q^2 \dots\dots\dots (18)$$

representando a perda de carga localizada devido a um registro de características " $R_1$ " e vazão "Q".

Calculando-se um coeficiente de resistência equivalente " $C_E$ " de uma tubulação idêntica à que possui o registro graduado e que ofereça uma perda de carga igual à do registro, tem-se:

$$h_r = \frac{8 k Q^2}{\pi^2 D^4 g} = 10,642 L Q^{1,85} C_E^{-1,85} D^{-4,87}$$

$$C_E^{-1,85} = \frac{0,75k D^{0,87}}{\pi^2 L g} \cdot Q^{0,15} = C_1^{-1,85} Q^{0,15} \dots\dots (19)$$

Então, a linha possuidora do registro graduado terá a seguinte perda de carga unitária, computando-se as perdas na tubulação e no registro:

$$J = 10,643 (C_1^{-1,85} Q^{0,15} + C^{-1,85}) D^{-4,87} Q^{1,85} \dots\dots (20)$$

b) - Registro em Tubo Curto

Um registro graduado num tubo curto funciona como um orifício, onde a perda de carga no tubo é muito pequena quando comparada com a do registro.

O registro pode operar fechado quando não há fluxo entre os tubos e completamente aberto, quando o ponto A é um nó para onde contribuem os tubos 1 e 2, equalizando as pressões. Pode ainda operar com qualquer graduação de abertura, transferindo fluxo do tubo com maior energia para o de menor energia, através da expressão:

$$P_j - P_i = K \frac{V^2}{2g} \dots\dots\dots (21)$$

2.5 - DIAGRAMAS DE FLUXO DE DADOS E DIAGRAMA DE BLOCOS

Apresenta-se neste item o Diagrama de Blocos resumido que dá uma idéia do seu funcionamento geral (Figura 4).

3 - AFERIÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO

Apresenta-se, a seguir, um roteiro resumido de aferição de um modelo:

- Levantamento dos Dados Físicos do Sistema

Devem ser obtidos os dados referentes às características do sistema, com os quais deve-se preparar um diagrama esquemático do mesmo, contendo todas as informações conhecidas.

- Levantamento de Dados de Vazão e Pressão

Como o Sistema ENGEHID simula sistemas hidráulicos em condições de escoamento permanente, os dados de vazão e pressão devem ser referentes a uma configuração hidráulica específica.



- Estimativa e Distribuição das Descargas no Sistema  
Na calibragem do modelo matemático as descargas em derivações são, geralmente, dados de entrada no computador que o Sistema ENGEHID utiliza para calcular vazões nas tubulações e pressões ou níveis piezométricos nos nós.
- Estimativa de Perdas Localizadas  
De uma maneira geral, as perdas de carga localizadas não permitem um cálculo direto. As válvulas são uma exceção, uma vez conhecido o valor da abertura.
- Simulação e Avaliação dos Resultados e Ajustes nos Parâmetros do Modelo  
A partir das informações coletadas e dos dados de vazão e pressão levantados na campanha de medições simultâneas o modelo matemático poderá ser processado. Após a simulação os dados devem ser comparados com os obtidos na programação de medições simultâneas. Os desvios devem ser corrigidos através dos ajustes das características físicas do sistema hidráulico ou das demandas estabelecidas nas junções (nós).

#### 4 - EXEMPLO

Apresenta-se, na Figura 5, um exemplo de malha hidráulica com configuração complexa. Para efeito de exemplo, imaginou-se um sistema pequeno, mas que apresentasse todos os elementos possíveis de serem encontrados em sistema de grande porte. Os resultados obtidos encontram-se nas Tabelas a seguir (Tabelas 1 e 2).

#### 5 - CONCLUSÕES

O Sistema ENGEHID, desenvolvido pela ENGEVIX permite a montagem de modelos matemáticos de malha hidráulica com qualquer grau de complexidade e com versatilidade suficiente para que se possa efetuar qualquer tipo de modificação sem maiores problemas. Esta versatilidade torna o Sistema extremamente útil na montagem de modelos que têm por finalidade o planejamento e a operação de Sistemas de Abastecimento de Água complexos. Pode-se afirmar que a única limitação é a do computador em que o Sistema é montado.

Foi efetuada, utilizando-se o Sistema ENGEHID, a modelagem matemática do Sistema Adutor da Região Metropolitana do Rio de Janeiro. Estes modelos matemáticos foram de grande utilidade, primeiramente na concepção das aduções do Plano Diretor de Abastecimento de Água da Região Metropolitana do Rio de Janeiro, e, posteriormente, na macrooperação do Sistema Adutor pelo pessoal de Operação da CEDAE. Servirão ainda de instrumento de apoio ao pes

soal de Planejamento da CEDAE, para estudos de quaisquer tipos de alterações.

6 - BIBLIOGRAFIA

1. LATROBE, A. Méthodes numériques en Mécanique des Fluides, Institut National Polytechnique, 1978
2. RIOS, Jorge L.P. Modelos matemáticos de autodepuração de cursos d'água. Lisboa, LNEC, 1974
3. ———. Utilização de modelos físicos e matemáticos no lançamento de efluentes. Rio de Janeiro, 1981. (Trabalho apresentado no Congresso Nacional de Engenharia Sanitária e Ambiental, 11, Fortaleza, 1981)
4. RIOS, Jorge L.P. e JATAHY, C.M.F. Modelos matemáticos aplicados à engenharia hidráulica e de meio-ambiente. Rio de Janeiro 1983 (Trabalho apresentado no Simpósio Luso-Brasileiro sobre Simulação e Modelação em Hidráulica, Blumenau, 1983)
5. RIOS, Jorge L.P. et al. Sistema ENGEHID para montagem de modelo matemático de malha hidráulica complexa. Rio de Janeiro, 1983 (Trabalho apresentado no Congresso Brasileiro de Engenharia Sanitária, 12, Camboriú, 1983).

NÚMERO DO NÓ	VAZÃO (ℓ/s)	NÍVEL PIEZOMÉTRICO (m)	COTA DO TERRENO (m)	PRESSÃO (m)
1	0,00	100,00	100,00	0,00
2	100,00	94,56	20,00	74,56
3	30,00	82,42	20,00	62,42
4	40,00	79,40	20,00	59,40
5	75,00	195,94	120,00	75,94
6	60,00	94,26	20,00	74,26
7	140,00	84,95	20,00	64,95
8	90,00	86,06	20,00	66,06
9	15,00	88,20	20,00	68,20
10	0,00	100,00	100,00	0,00
11	50,00	79,79	20,00	59,79
12	15,00	97,63	40,00	57,63
15	10,00	97,44	40,00	57,44
13	10,00	96,63	40,00	56,63
16	5,00	95,18	40,00	55,18
14	5,00	91,43	40,00	51,43
17	18,00	90,52	40,00	50,52

NÚMERO DE NÓS: 17    NÚMERO DE LINHAS: 21    SOMATÓRIO DAS VAZÕES NAS FONTES: 665 ℓ/s

TABELA 1 - "REDE COM REGISTRO "A" CONTROLADO"

NÚMERO DA LINHA	EXTREMOS MONT. JUS.	DIÂMETRO (mm)	COMPRIMENTO (m)	COEFICIENTE (C)	ELEVATÓRIA (m de AMT)	REGISTRO (K)	VAZÃO (ℓ/s)	VELOCIDADE (m/s)	PERDA DE CARGA (m)
100	1	600	1300	100	0	0	378	1,338	5,44
101	2	400	2500	100	0	0	141	1,122	12,14
102	3	300	50	90	0	100	51	0,718	2,63
103	11	100	1100	80	0	0	1	0,092	0,39
104	4	300	4500	90	150	0	75	1,061	33,45
105	4	400	3000	100	0	0	60	0,480	3,02
106	2	500	4100	100	0	0	137	0,698	6,36
107	9	500	1700	100	0	0	122	0,623	2,14
108	8	400	3700	100	0	0	31	0,250	1,11
109	7	300	2500	90	0	0	-52	-0,731	-9,31
110	6	500	1500	100	0	0	223	1,136	5,74
111	4	300	3300	90	0	50	54	0,762	14,86
112	1	400	2000	100	0	0	66	0,524	2,37
115	12	200	50	90	0	0	18	0,578	0,19
116	13	100	50	90	0	0	9	1,108	1,45
117	14	100	50	90	0	0	7	0,862	0,91
113	12	200	100	90	0	0	30	0,965	1,00
114	13	100	100	90	0	0	12	1,518	5,20
118	15	100	100	90	0	0	8	0,968	2,26
119	16	100	100	90	0	0	11	1,430	4,66
120	6	300	2500	100	0	0	57	0,812	9,31

NÚMERO DE NÓS: 17      NÚMERO DE LINHAS: 21      SOMATÓRIO DAS VAZÕES NAS FONTES: 665 ℓ/s

TABELA 2 - "REDE COM REGISTRO "A" CONTROLADO"

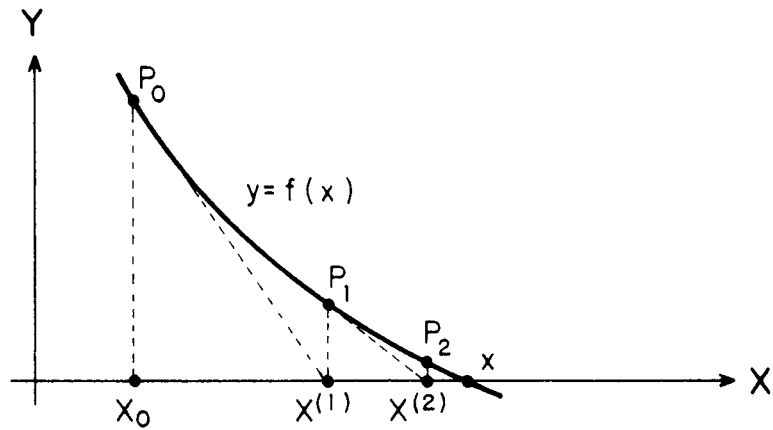


FIGURA 1 - " MÉTODO DE NEWTON- RAPHSON "

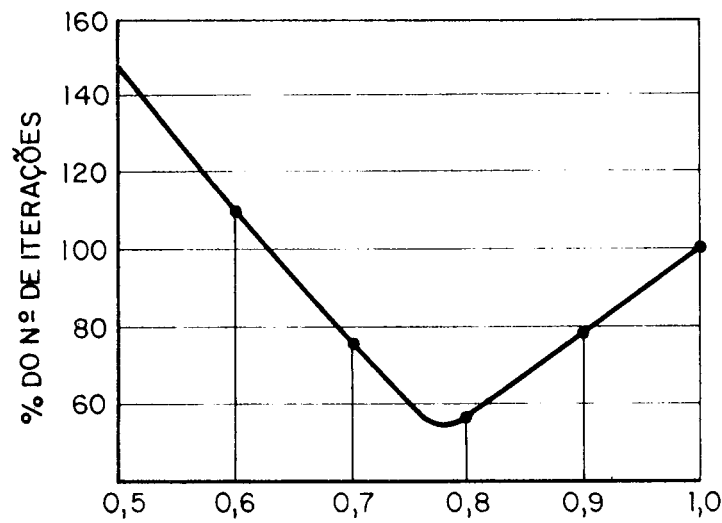


FIGURA 2 - " VARIACÃO DO FATOR DE CONVERGÊNCIA "

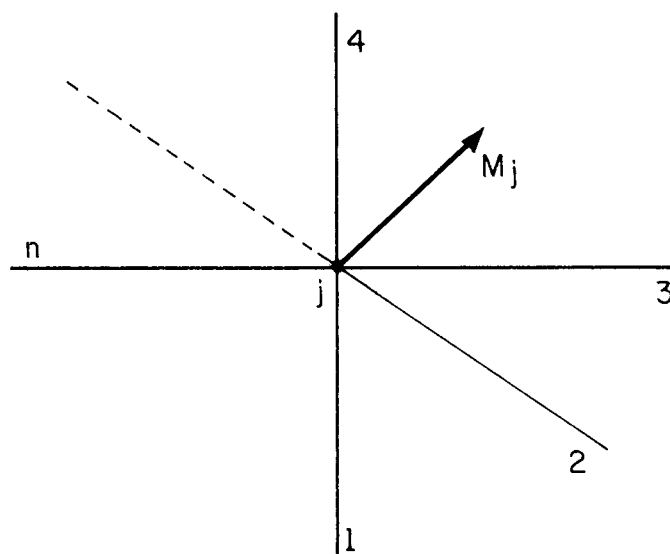


FIGURA 3 - " ESQUEMA DO NÓ " J "

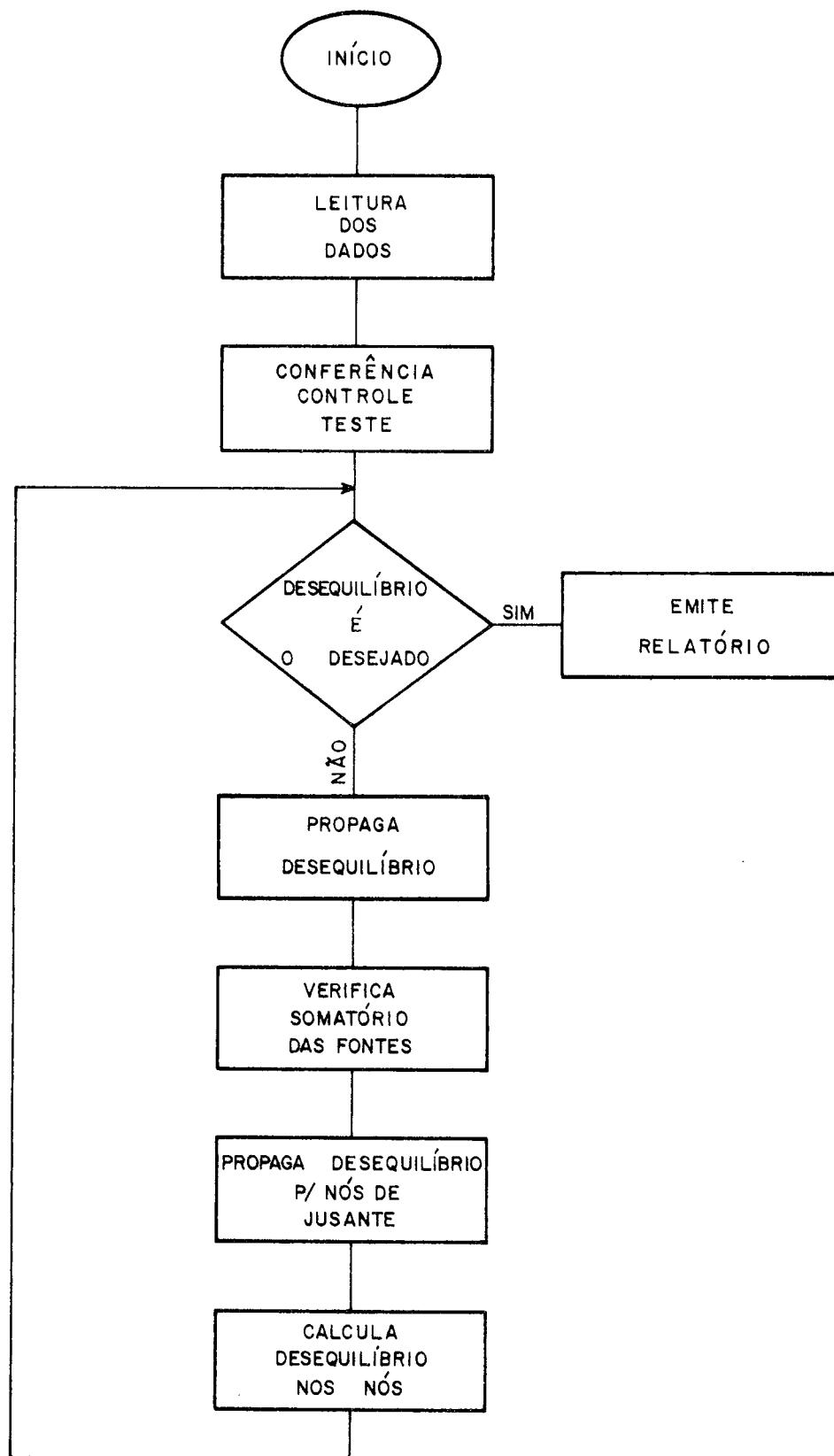
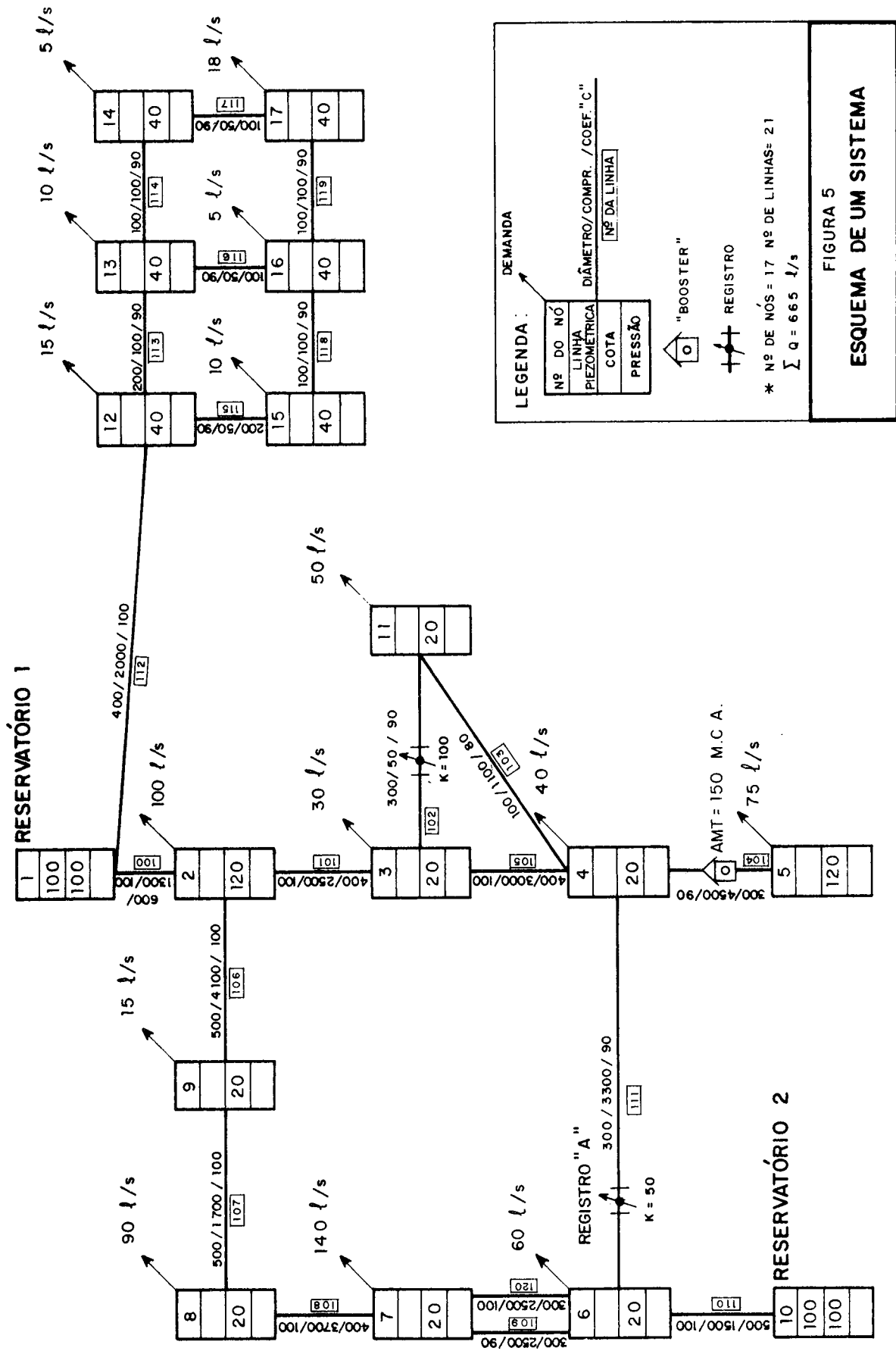


FIGURA 4 - " DIAGRAMA DE BLOCOS RESUMIDOS "



**LEGENDA:**

Nº DO NÓ	DEMANDA
LINHA	DIÂMETRO/COMPR. / COEF. "C"
PIEZOMÉTRICA	Nº DA LINHA
COTA	
PRESSÃO	

"BOOSTER"  
 REGISTRO

\* Nº DE NÓS = 17 Nº DE LINHAS = 21  
 Σ Q = 665 l/s

FIGURA 5  
**ESQUEMA DE UM SISTEMA**