

# SOBRE A ESTIMAÇÃO DE INTERVALOS DE CONFIANÇA PARA OS QUANTIS DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS HIDROLÓGICAS

## ON CONSTRUCTING CONFIDENCE INTERVALS FOR THE QUANTILES OF HYDROLOGICAL RANDOM VARIABLES

**Artur Tiago Silva**

Mestre em Engenharia Civil // Instituto Superior Técnico // artur.tiago.silva@ist.utl.pt

**Mauro Naghettini**

Professor Associado // Universidade Federal de Minas Gerais // mauronag@superig.com.br

**Maria Manuela Portela**

Professora Auxiliar // Instituto Superior Técnico // mps@civil.ist.utl.pt

**RESUMO:** O trabalho que se apresenta analisa alguns aspectos teóricos e práticos sobre a construção de intervalos de confiança de quantis de variáveis aleatórias hidrológicas. Tais intervalos assumem um papel preponderante no dimensionamento e operação de sistemas de recursos hídricos envolvendo variáveis aleatórias, uma vez que sintetizam as incertezas associadas à estimação de parâmetros e de quantis a partir de amostras finitas. A construção de intervalos de confiança de quantis pode ser feita por três abordagens: (i) pela aproximação gaussiana dos quantis em torno da estimativa da variável para uma dada probabilidade de não-excedência – um método de implementação muito complexa quando as distribuições têm três ou mais parâmetros; (ii) pela técnica de simulação de Monte Carlo, que envolve a geração de um elevado número de amostras sintéticas de dimensão igual à da amostra original; (iii) pela técnica de re-amostragem *bootstrap*, que envolve a obtenção de um elevado número de amostras por re-amostragem com reposição dos dados originais e com dimensão igual à da amostra original. As três abordagens foram aplicadas à construção de intervalos de confiança a 95% de quantis das distribuições generalizada de extremos (GEV, com três parâmetros) e de Gumbel (com dois parâmetros), com parâmetros estimados pelo método dos momentos convencionais, utilizando, para o efeito, dados de precipitações diárias máximas anuais em três postos udométricos de Portugal Continental. Os resultados dessa aplicação demonstram que, independentemente da abordagem utilizada, para valores elevados da probabilidade de não-excedência, os intervalos de confiança dos quantis da lei GEV são notoriamente mais amplos dos que os da lei de Gumbel, em virtude do acréscimo de incerteza introduzido pelo terceiro parâmetro daquela primeira lei, e que os intervalos de confiança construídos pela técnica de *bootstrap* têm menor amplitude relativamente aos construídos, tanto por aproximação gaussiana, como pela técnica de Monte Carlo, sendo que essa amplitude reduzida é muito mais notória no caso da lei GEV do que no da de Gumbel. Adicionalmente concebeu-se e implementou-se um procedimento com o objectivo de avaliar quantitativamente o desempenho relativo das técnicas de Monte Carlo e do *bootstrap*. Dos resultados da anterior análise resulta a recomendação da aplicação da técnica de Monte Carlo para a construção de intervalos de confiança de quantis das leis GEV e de Gumbel em detrimento da técnica de *bootstrap*, embora no caso da GEV se tenha verificado uma aparente subestimação sistemática da incerteza resultante da estimação de parâmetros a partir de amostras finitas.

**Palavras-chave:** análise de frequência, variáveis hidrológicas, intervalos de confiança, Monte Carlo, *bootstrap*

**ABSTRACT:** *The research presented in this paper analyses some theoretical and practical aspects of constructing confidence intervals for the quantiles of hydrological random variables. Such intervals assume an important role in the design and operation of water resources systems, as they summarize the uncertainties associated with estimating distribution parameters and quantiles from finite data samples of hydrologic random variables. The construction of confidence intervals for quantiles can be done following three approaches: (i) the Gaussian approximation of quantiles around the estimate of the variable for a given non-exceedance probability - a method of cumbersome implementation when using distributions described by three or more parameters; (ii) the Monte Carlo simulation technique, which involves generating a large number of synthetic samples with a length equal to that of the original sample; (iii) the bootstrap resampling technique, which involves obtaining a large number of samples by sampling with replacement from the original data. The three approaches were applied to the construction of confidence intervals for the quantiles of the generalized extreme value (three-parameter GEV) and the (two-parameter) Gumbel distributions, with parameters estimated by the method of conventional moments, using annual maximum daily precipitation data from three rainfall gauging stations in mainland Portugal. The results of that application show that for high values of the non-exceedance probability, the confidence intervals for the quantiles of the GEV distribution are wider than the ones for the Gumbel distribution, due to the increment in uncertainty introduced by the third parameter of the GEV, and the confidence intervals resulting from the bootstrap technique are narrower as compared to the ones constructed either through the Gaussian approximation or the Monte Carlo technique. This relatively reduced amplitude was more evident for the GEV rather than for the Gumbel distribution. Additionally, a procedure was devised and implemented to make a quantitative assessment of the relative performances of the Monte Carlo and the bootstrap techniques. The results of the previous analysis lead to the recommendation of the Monte Carlo technique for constructing confidence intervals for the quantiles of the GEV and Gumbel distributions rather than the bootstrap, although in the case of the GEV there was an apparent systematic underestimation of uncertainty due to parameter estimation from finite samples.*

**Keywords:** frequency analysis, hydrological variables, confidence intervals, Monte Carlo, *bootstrap*

# 1. INTRODUÇÃO

As etapas compreendidas pela análise local de frequência de uma amostra de uma variável aleatória hidrológica  $X$ , composta por um conjunto de  $N$  valores (totais, máximos, mínimos ou médios) anuais  $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ , supostamente independentes e igualmente distribuídos, podem ser sistematizadas, de modo geral, por:

- i. apreciação do conjunto dos elementos que constituem a amostra quanto aos pressupostos de aleatoriedade, independência, homogeneidade e representatividade;
- ii. identificação de leis de distribuição de probabilidades, em geral descritas por dois ou três parâmetros, consideradas potenciais candidatas à síntese matemática do comportamento probabilístico da variável aleatória em questão;
- iii. para cada lei ou modelo de distribuição de probabilidades em estudo, estimação dos correspondentes parâmetros – sendo que, para o efeito, os métodos mais frequentemente utilizados são os dos momentos convencionais, da máxima verosimilhança e de momentos-L – e dos quantis a que conduzem;
- iv. identificação e tratamento de eventuais pontos atípicos, ou *outliers*, com eventual repetição de algumas etapas precedentes;
- v. avaliação das incertezas associadas às estimativas dos parâmetros e de quantis, quanto aos atributos de não-enviesamento e de precisão;
- vi. selecção do(s) método(s) de estimação mais eficiente(s), atendendo às variâncias das estimativas de parâmetros e de quantis;
- vii. selecção do(s) modelo(s) distributivo(s) que melhor se adequa(m) à amostra em estudo, tendo em vista a etapa anterior e respectivas medidas de ajustamento aos elementos daquela amostra; e
- viii. estimação dos quantis e correspondentes intervalos de confiança de acordo com a probabilidade de não-excedência (ou período de retorno) apropriada ao risco hidrológico e ao horizonte de projecto admitidos.

As anteriores etapas têm sido objecto de um grande número de investigações ao longo das últimas décadas, embora necessariamente com algumas variantes em resultado da complexidade e de alguma subjectividade que lhes são intrínsecas. Para uma breve revisão sobre a matéria, sugere-se a consulta de Stedinger *et al.* (1993), Rao e Hamed (2000) e Kidson e Richards (2005).

No anterior contexto, entendeu-se ser relevante analisar algumas das particularidades da construção de intervalos de confiança para os quantis de variáveis aleatórias hidrológicas, objecto da etapa viii antes sistematizada, pela pertinência da informação que daí pode extrair na abordagem de aspectos práticos da engenharia de recursos hídricos, de tomada de decisão e do dimensionamento hidrológico sob condições de incerteza.

A estimação por intervalos de um quantil,  $X_F$ , associado a uma probabilidade de não-excedência avaliada de acordo com um dado modelo com  $k$  parâmetros,  $F_X(x|\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ , em que  $\theta_i$  designam aqueles parâmetros, consiste em identificar os limites inferior,  $\lambda_i$ , e superior,  $\lambda_s$ , tais que tornam válida a equação:

$$P(\lambda_i \leq X_F \leq \lambda_s) = 1 - \alpha \quad (1)$$

na qual  $(1-\alpha)$  denota o nível de confiança.

Como  $X_F$  é uma grandeza populacional e não uma variável aleatória, a interpretação correcta da equação (1) é a de que a probabilidade de o intervalo  $[\lambda_i, \lambda_s]$  conter o verdadeiro, embora desconhecido, valor de  $X_F$  é  $100(1-\alpha)\%$ , sublinhando-se que, neste caso, as variáveis aleatórias são, de facto, os limites  $\lambda_i$  e  $\lambda_s$ . Também é importante notar que a equação (1) reflecte as incertezas decorrentes da estimação dos parâmetros  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$  e, conseqüentemente, de  $X_F$ , face às flutuações amostrais, não incluindo as incertezas associadas à selecção da lei de probabilidades  $F_X(x|\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ . A priori, tal lei é suposta ser a correcta função de distribuição de probabilidades que governa o comportamento da variável aleatória  $X$ .

Para um mesmo nível de confiança,  $100(1-\alpha)\%$ , a amplitude do intervalo de confiança relativo a  $X_F$  resume as incertezas associadas à estimação dos  $k$  parâmetros amostrais a partir de uma amostra finita. A amplitude do anterior intervalo aumenta com o aumento do número de parâmetros a estimar e com a probabilidade de não-excedência,  $F$ , e diminui com o aumento da dimensão da amostra  $N$ . Inversamente, para uma dada distribuição, fixadas a dimensão da amostra e a probabilidade de não-excedência, a amplitude do intervalo de confiança aumenta com o incremento de  $(1-\alpha)$ .

A construção de intervalos de confiança é parte fundamental da análise de frequência de variáveis aleatórias hidrológicas, pois sintetiza as incertezas decorrentes da estimação de parâmetros e de quantis a partir de amostras finitas. Conforme será ilustrado em secções posteriores, o aumento substancial da amplitude do intervalo de confiança, à medida que a probabilidade de não-excedência aumenta para valores

superiores a  $(1-1/N)$ , evidencia as enormes incertezas decorrentes da estimação dos parâmetros e indica os riscos de se tomar uma decisão equivocada, quanto às estimativas de quantis raros e extremos.

A construção de intervalos de confiança para os quantis de uma variável aleatória pode ser feita por meio de três abordagens. A primeira decorre da aplicação da teoria assintótica de amostragem, segundo a qual, para uma dada probabilidade de não-excedência,  $F$ , os quantis em torno da estimativa  $\hat{X}_F$  são aproximadamente distribuídos de acordo com a lei Normal, com desvio-padrão dependente da dimensão da amostra e do método de estimação dos parâmetros da distribuição. A segunda abordagem emprega a técnica de Monte Carlo para, a partir do conjunto de estimativas dos parâmetros de  $F_X(x|\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ , obter  $M$  (com  $M$  muito grande) amostras sintéticas com dimensão igual à da amostra original. Tais amostras sintéticas são utilizadas no cálculo de  $M$  curvas de quantis que, depois de ordenadas para uma dada probabilidade de não-excedência,  $F$ , permitem a construção do correspondente intervalo de confiança  $100(1-\alpha)\%$  para  $X_F$ . A terceira alternativa utiliza uma técnica de re-amostragem – o *bootstrap* na designação inglesa – que permite obter um grande número de amostras ( $M$ ) a partir de re-amostragens com reposição da amostra original. À semelhança da técnica de Monte Carlo, as amostras obtidas por re-amostragem são utilizadas na estimativa das  $M$  curvas de quantis que, depois de ordenadas para uma dada probabilidade de não-excedência  $F$ , permitem a construção do correspondente intervalo de confiança  $100(1-\alpha)\%$  para  $X_F$ .

O artigo que se apresenta tem por objectivo principal comparar as três abordagens antes mencionadas, na tentativa de extrair conclusões válidas no que respeita à recomendação de uso preferencial de uma dessas abordagens, designadamente, no âmbito da prática profissional da engenharia de recursos hídricos. Para tanto, o artigo foi organizado em quatro secções, para além da presente introdução. A secção a seguir sintetiza os fundamentos teóricos da construção de intervalos de confiança de quantis, segundo as três abordagens antes mencionadas. Em seguida, apresentam-se os dados de base e as distribuições utilizadas no estudo. Segue-se uma secção contendo os procedimentos implementados e os resultados alcançados e, por fim, sistematizam-se as principais conclusões decorrentes do estudo levado a cabo.

## 2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

### 2.1. Nota prévia

As subsecções que se seguem contêm a apresentação breve dos fundamentos teóricos relativos à estimação por intervalos do quantil  $X_F$  relativo a uma dada probabilidade de não-excedência  $F$ , por meio das três abordagens antes referidas, nomeadamente: (i) pela aproximação pela lei Normal; (ii) pela técnica de

simulação de Monte Carlo; e (iii) pela técnica de re-amostragem de *bootstrap*.

### 2.2. Construção de intervalos de confiança para quantis pela aproximação pela lei Normal

A construção de intervalos de confiança para a média e para a variância de uma população Normal é facilitada pela possibilidade de dedução das distribuições exactas dessas estatísticas amostrais, tais como exemplificadas pelas distribuições  $t$  de Student e do  $\chi^2$ , muito frequentes em aplicações triviais de métodos estatísticos. De facto, as distribuições exactas das estatísticas amostrais podem ser obtidas sob forma explícita quando a variável aleatória  $X$  segue uma distribuição de probabilidade que goze da propriedade aditiva, como sejam as distribuições Normal, Binomial e de Poisson. Para outras distribuições é quase sempre impossível determinar, de forma explícita, as distribuições exactas, quer das estatísticas amostrais, tais como os coeficientes de assimetria e de curtose, quer de um estimador genérico  $\hat{\theta}$  de um parâmetro populacional  $\theta$ , quer ainda do estimador  $\hat{X}_F$  de um quantil  $x_F$ . Nestas circunstâncias, uma alternativa possível para obter distribuições de amostragem aproximadas é dada pelos resultados da chamada teoria assintótica de amostragem.

Cramér (1946) demonstrou que, sob condições gerais e para amostras de dimensão  $N$ , as distribuições de amostragem de certas características, tais como funções de momentos e estimadores genéricos  $\hat{\theta}$ , convergem assintoticamente para uma distribuição Normal de média igual à estimativa em questão, e de variância que pode ser escrita sob a forma  $c/N$ , onde  $c$  depende da característica estudada e do método de estimação utilizado. Se, por exemplo,  $\hat{\theta}$  for um estimador de máxima verosimilhança e se a distribuição tiver um único parâmetro,  $\theta$ , prova-se que

$$1/c = E \left[ \left\{ \frac{\partial \ln [f_X(x; \theta)]}{\partial \theta} \right\}^2 \right] \quad (2)$$

em que  $E[\cdot]$  denota o operador valor esperado ou esperança matemática. Entretanto, se a distribuição tiver mais do que um parâmetro, o cálculo do factor  $c$  para obter a variância da distribuição Normal assintótica, é relativamente mais complexo, pela forçosa inclusão da interdependência entre os estimadores de parâmetros. O método de estimação a partir de amostras finitas de dimensão  $N$  também afecta a variância relativa ou, por outras palavras, a eficiência dos estimadores. Ao leitor interessado em detalhes sobre estas questões, sugerem-se as referências Cramér (1946) e Rao (1973), para considerações teóricas, e Kaczmarek (1957), Kite (1977) e Rao e Hamed (2000), para exemplos e aplicações em hidrologia e meteorologia.

Uma vez estimados os parâmetros de uma distribuição de probabilidades  $F_X(x|\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ , por um dado método

de estimação, a análise de frequência de variáveis hidrológicas prossegue normalmente com o seu objectivo mais frequente e pertinente e que envolve a estimativa do quantil  $x_F$  correspondente a uma dada probabilidade de não-excedência  $F$ , adoptada como critério de projecto. Tal quantil pode ser estimado pela função inversa de  $F$ , representada por  $\phi(F)$ , ou seja

$$\hat{X}_F = F^{-1}(F) = \phi(F) \quad (3)$$

em que  $\phi(F)$  é, portanto, função dos parâmetros que definem  $F$ . É evidente que um estimador pontual, como  $\hat{X}_F$ , contém erros que são inerentes às incertezas presentes na estimação dos parâmetros populacionais,  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ , a partir de amostras de dimensão  $N$ . Uma medida frequentemente usada para quantificar a variabilidade presente em  $\hat{X}_F$ , e, portanto, indicar a "confiabilidade" ou quão confiáveis são as estimativas dos quantis de variáveis hidrológicas, é dada pelo chamado erro padrão da estimativa,  $S_F$ , definido por:

$$S_F = \sqrt{E \left[ \left\{ \hat{X}_F - E[\hat{X}_F] \right\}^2 \right]} \quad (4)$$

Sublinha-se mais uma vez que o erro padrão da estimativa leva em conta apenas os erros oriundos do processo de estimação a partir de amostras finitas e, portanto, não considera o erro devido à eventual selecção de uma distribuição de probabilidades inadequada. Logo, supondo-se que a distribuição  $F_X(x)$  tenha sido correctamente especificada, o erro padrão da estimativa subentende apenas os erros presentes nas estimativas dos parâmetros daquela distribuição. Consequentemente, os métodos de estimação mais usuais, a saber, os métodos dos momentos convencionais, da máxima verossimilhança e dos momentos-L, produzirão diferentes erros-padrão da estimativa, sendo que o de maior eficiência, do ponto de vista estatístico, é aquele que conduzir ao menor valor de  $S_F$ .

A teoria assintótica de distribuições de amostragens demonstra que a distribuição de  $\hat{X}_F$  é aproximadamente Normal, com média igual á estimativa  $\hat{X}_F$  e desvio-padrão  $S_F$ . Como resultado, podem ser construídos intervalos de confiança aproximados, a um nível de confiança  $100(1-\alpha)\%$ , cujos limites são expressos por:

$$\hat{x}_F \pm |z_{\alpha/2}| S_F \quad (5)$$

onde  $z_{\alpha/2}$  representa a variável Normal padrão ou reduzida, para a probabilidade de não-excedência de  $\alpha/2$ . Aplicando as propriedades do valor esperado á equação (5), depois de substituir a estimativa  $\hat{X}_F$  pelo estimador  $\hat{X}_F$ , é possível demonstrar que, para uma distribuição de probabilidades genérica  $F_X(x|\theta_1, \theta_2)$ , de

dois parâmetros  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , o quadrado do erro padrão da estimativa pode ser expresso por:

$$S_F^2 = \left( \frac{\partial x}{\partial \theta_1} \right)^2 Var(\hat{\theta}_1) + \left( \frac{\partial x}{\partial \theta_2} \right)^2 Var(\hat{\theta}_2) + 2 \left( \frac{\partial x}{\partial \theta_1} \right) \left( \frac{\partial x}{\partial \theta_2} \right) Cov(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) \quad (6)$$

em que  $Var$  e  $Cov$  designam, respectivamente, a variância e a covariância dos argumentos a que são aplicados. Analogamente para uma distribuição  $F_X(x|\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ , de três parâmetros  $\theta_1, \theta_2$  e  $\theta_3$ , prova-se que:

$$S_F^2 = \left( \frac{\partial x}{\partial \theta_1} \right)^2 Var(\hat{\theta}_1) + \left( \frac{\partial x}{\partial \theta_2} \right)^2 Var(\hat{\theta}_2) + \left( \frac{\partial x}{\partial \theta_3} \right)^2 Var(\hat{\theta}_3) + 2 \left( \frac{\partial x}{\partial \theta_1} \right) \left( \frac{\partial x}{\partial \theta_2} \right) Cov(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) + 2 \left( \frac{\partial x}{\partial \theta_1} \right) \left( \frac{\partial x}{\partial \theta_3} \right) Cov(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_3) + 2 \left( \frac{\partial x}{\partial \theta_2} \right) \left( \frac{\partial x}{\partial \theta_3} \right) Cov(\hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3) \quad (7)$$

Nas equações (6) e (7), as derivadas parciais são calculadas pela relação  $\hat{X}_F = F^{-1}(F) = \phi(F)$  e, portanto, dependem da expressão analítica da função inversa da função distribuição de probabilidades,  $F_X(x)$ , cuja forma é, em geral, não-linear. Por outro lado, as variâncias e as covariâncias dos parâmetros dependem do método de estimação [método dos momentos convencionais, da máxima verossimilhança, ou dos momentos-L, entre outros].

Kite [1977] deduziu os termos necessários ao cálculo de  $S_F$  para as distribuições de dois e de três parâmetros mais usuais na análise de frequência de variáveis hidrológicas, considerando os métodos de estimação dos momentos convencionais e da máxima verossimilhança, enquanto Hosking [1986] o fez para o método de estimação dos momentos-L e apenas para alguns modelos probabilísticos. Rao e Hamed [2000] e Naghettini e Pinto [2007] contêm uma síntese desses resultados.

Para as principais distribuições de dois parâmetros e para os métodos de estimação usuais, a determinação de  $S_F$ , apesar de requerer um grande número de operações de cálculo, não é demasiadamente complexa.

Para as distribuições de três parâmetros, a determinação de  $S_F$ , além de demasiadamente laboriosa e complexa, requer o cálculo das covariâncias entre o coeficiente de assimetria, a média e a variância; para essas distribuições, a dependência em geral não-linear entre os quantis e o momento central de terceira ordem pode fazer com que a distribuição de amostragem dos quantis se afaste da lei Normal, produzindo subestimação ou sobrestimação dos intervalos de confiança, dependendo da probabilidade de não-excedência,  $F$  [Hall *et al.*, 2004]. Adiciona-se a essa dificuldade a constatação de que não existem expressões simples para os termos necessários ao cálculo de  $S_F$ , tendo em vista o conjunto completo das distribuições e dos métodos de estimação usuais na análise de frequência de variáveis hidrológicas.

Os intervalos de confiança obtidos pela lei Normal são considerados aproximados porque decorrem de resultados assintóticos. Entretanto, Meylan *et al.* (2008) apresentam uma lista de argumentos favoráveis ao emprego da lei Normal como modelo para a distribuição de amostragem de  $\hat{X}_F$ . Entre tais argumentos, destacam-se que: (i) em resultado do teorema do limite central, a lei Normal é a forma assintótica de um grande número de distribuições; (ii) se comete apenas um erro de segunda ordem (erro sobre o erro), caso a verdadeira distribuição de amostragem dos quantis difira da lei Normal; e (iii) as eventuais diferenças entre a verdadeira distribuição de amostragem dos quantis e a lei Normal serão significativas apenas para elevados valores do nível de confiança  $100(1-\alpha)\%$ .

### 2.3. Construção de intervalos de confiança para quantis por simulação de Monte Carlo

Uma alternativa para associar intervalos de confiança a quantis, muito menos laboriosa do que a aproximação pela lei Normal, embora fazendo uso intensivo de rotinas computacionais, utiliza a simulação, por recurso à técnica de Monte Carlo, de um grande número de amostras com dimensão  $N$  igual à da amostra original – amostras sintéticas da dimensão  $N$  – com estimação a partir de cada uma dessas amostras, do quantil pretendido, ao qual é posteriormente associada uma distribuição empírica de probabilidades.

Suponha-se que, à amostra  $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ , se ajustou uma distribuição de probabilidades genérica  $F_X(x|\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ , cujos parâmetros  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$  foram estimados a partir de um método qualquer de estimação designado por ME. A aplicação da técnica de Monte Carlo tendo em vista construir intervalos de confiança em torno da estimativa do quantil  $\hat{x}_F$ , de probabilidade de não-excedência  $F$ , processa-se de acordo com as seguintes etapas sequenciais:

- i. geração de um número aleatório uniforme entre 0 e 1, denotando-o por  $u_i$ ;
- ii. cálculo da estimativa  $\hat{x}_F$  correspondente a  $u_i$ , por meio da função inversa,  $\hat{x}_F = F^{-1}(u_i) = \phi(u_i)$ , e usando, para o efeito, as estimativas dos parâmetros  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$  fornecidas pelo método ME a partir da amostra original;
- iii. repetição das etapas (i) e (ii) até  $i=N$ , constituindo-se, assim, a primeira de  $W$  amostras sintéticas da variável  $X$ ;
- iv. obtida uma amostra sintética com dimensão  $N$ , aplicação do método de estimação ME para calcular as estimativas dos parâmetros  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$  a partir dessa amostra, que, introduzidas na função inversa,  $\hat{x}_F = F^{-1}(F) = \phi(F)$ , permitem estimar o quantil correspondente ao valor adoptado como critério de projecto para a probabilidade de não-excedência (por exemplo,  $F=0.99$ ) para essa amostra sintética;

- v. repetição das etapas (i) a (iv) para a segunda, a terceira e assim por diante, até a  $W$ -ésima amostra sintética, onde  $W$  deve ser um número suficientemente grande, por exemplo,  $W=5000$ ;
- vi. para a probabilidade de não-excedência adoptada, obtém-se, assim, um conjunto de  $W$  diferentes quantis  $\hat{x}_{F,j}, j=1, \dots, W$ , os quais são ordenados por valores crescentes;
- vii. o intervalo formado pelos quantis ordenados que ocupam as posições  $W(\alpha/2)$  e  $W(1-\alpha/2)$  corresponderá ao intervalo de confiança a  $100(1-\alpha)\%$  para o quantil  $X_F$ ; e
- viii. eventual repetição das etapas (iv) a (vii) se estiverem em causa outros valores de probabilidade de não-excedência  $F$ .

Além de representar uma alternativa simples e de fácil implementação, tendo em vista os recursos computacionais actualmente disponíveis, a construção de intervalos de confiança por recurso à simulação de Monte Carlo não presume que a distribuição de amostragem de  $\hat{X}_F$  seja Normal. De facto, a técnica permite a construção da distribuição empírica dos quantis a partir das  $W$  séries sintéticas obtidas por simulação. Meylan *et al.* (2008) contêm exemplos de concordância quase perfeita entre os intervalos de confiança obtidos pela aproximação pela lei Normal e pela técnica de simulação de Monte Carlo, advertindo, entretanto, que podem ocorrer diferenças significativas quando as amostras têm pequena dimensão.

### 2.4. Construção de intervalos de confiança para quantis por re-amostragem *bootstrap*

A técnica ou algoritmo de *bootstrap* faz parte dos chamados métodos de re-amostragem por simulação, utilizados na inferência estatística, e foi introduzida por Efron (1979). Os métodos de re-amostragem geram um grande conjunto de amostras, cada uma das quais é obtida a partir dos dados originais, e compreendem os algoritmos *jack-knife bootstrap*. Enquanto o algoritmo de *jack-knife* gera réplicas amostrais pela eliminação de um ou mais pontos da amostra, o de *bootstrap* fá-lo a partir da re-amostragem com reposição dos dados originais. Hall *et al.* (2004) apontam diversas aplicações do algoritmo de *bootstrap* em hidrologia e recursos hídricos e particularizam a sua utilização na construção de intervalos de confiança dos quantis resultantes da análise de frequência de variáveis aleatórias hidrológicas. Segue-se uma sistematização das etapas requeridas pelo algoritmo de *bootstrap* para a construção de intervalos de confiança para quantis.

Suponha-se que, à amostra  $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ , se ajustou uma distribuição de probabilidades genérica  $F_X(x|\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ , cujos parâmetros  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$  foram estimados a partir de um método qualquer de estimação designado por ME. A aplicação do algoritmo de *bootstrap* tendo em vista construir intervalos de confiança em torno

da estimativa do quantil  $\hat{x}_F$ , de probabilidade de não-excedência F, processa-se de acordo com as seguintes etapas sequenciais, de algum modo próximas das antes apresentadas para a aplicação da técnica de Monte Carlo, excepto no que respeita à geração de amostras a partir de uma amostra original:

- i. denote-se por X o vector  $[x_1, x_2, \dots, x_N]^T$  contendo a amostra original;
- ii. para um valor W suficientemente grande, da ordem de 5000, constituição de W vectores independentes ou vectores de re-amostragem  $X_1^*, X_2^*, \dots, X_W^*$ , cada um contendo N valores extraídos aleatoriamente e com reposição da amostra original  $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ ;
- iii. para cada vector de re-amostragem  $X_j^*$ ;  $j=1, \dots, W$ , estimação, pelo método ME, dos parâmetros  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ , a partir de cujas estimativas se recorre à função inversa  $\hat{x}_F = F^{-1}(F) = \phi(F)$  para calcular a estimativa do quantil correspondente ao valor especificado da probabilidade de não-excedência ( $F=0.99$ , por exemplo);
- iv. para a probabilidade de não-excedência adoptada, ter-se-á um conjunto de W diferentes quantis  $\hat{x}_{F_j}$ ;  $j=1, \dots, W$ , os quais devem ser classificados em ordem crescente;
- v. o intervalo formado pelos quantis com as ordens de classificação  $W(\alpha/2)$  e  $W(1-\alpha/2)$  corresponderá ao intervalo de confiança a 100  $(1-\alpha)\%$  para o quantil  $X_F$ ; e
- vi. eventual repetição das etapas (iii) a (v) se estiverem em causa outros valores de probabilidade de não-excedência F.

A técnica de *bootstrap* descrita é a mais simples dessa classe de algoritmos, sendo referida como “*bootstrap dos percentis*” (*percentile bootstrap*). Hall et. al. (2004) referem outras variantes do algoritmo *bootstrap*, tais como o “*bootstrap com aproximação Gaussiana*” (*Gaussian approximation bootstrap*), “*bootstrap studentizado*” (*bootstrap-t*) e o “*bootstrap acelerado e com correcção de viés*” (*bias-corrected and accelerated bootstrap*,  $BC_a$ ), mas concluem pela aplicação do “*bootstrap dos percentis*” para a construção de intervalos de confiança para os quantis.

Com base nos resultados obtidos para as duas distribuições estudadas, a saber, a de Gumbel e a de Weibull, Hall et al. (2004) concluíram que, em geral, os intervalos de confiança de quantis resultantes do algoritmo “*bootstrap padrão dos percentis*”, são confiáveis para amostras com dimensão superior a 30 e dependem das propriedades distributivas dos quantis re-amostrados e da forma matemática como estes se relacionam aos parâmetros.

Na revisão bibliográfica sobre o assunto, não foram identificados estudos abrangentes sobre o emprego do algoritmo de *bootstrap* para a construção de intervalos de confiança para os quantis de distribuições de três parâmetros usuais, tais como a lei Generalizada de

Valores Extremos (GEV), também objecto do presente artigo.

### 3. DISTRIBUIÇÕES DE VALORES EXTREMOS E DADOS DE BASE

#### 3.1. Distribuições de valores extremos utilizadas e método de estimação de parâmetros

A análise subjacente ao presente artigo utilizou as distribuições generalizada de extremos (*generalized extreme value* – GEV) e Tipo I de extremos, ou de Gumbel. A função distribuição de probabilidade, F, da distribuição GEV é dada por:

$$F_X(x|\theta) = \exp\left\{-\left[1 - \kappa\left(\frac{x-\beta}{\alpha}\right)\right]^{\frac{1}{\kappa}}\right\}; \theta = [\beta, \alpha, \kappa]^T; \alpha > 0 \quad (8)$$

em que  $\beta$ ,  $\alpha$  e  $\kappa$  são os parâmetros de posição, escala e forma, respectivamente. A anterior expressão incorpora as três formas assintóticas de valores extremos máximos, determinadas pelo valor e sinal do parâmetro de forma,  $\kappa$ : para  $\kappa < 0$  e  $\kappa > 0$ , a GEV representa as distribuições Tipo II de extremos e Tipo III de extremos, respectivamente; para  $\kappa = 0$ , a GEV resulta na distribuição Tipo I de extremos ou de Gumbel (com dois parâmetros), cuja função distribuição de probabilidade é, assim, dada por:

$$F_X(x|\theta) = \exp\left[-\exp\left(-\frac{x-\beta}{\alpha}\right)\right]; \theta = [\beta, \alpha]^T; \alpha > 0 \quad (9)$$

Pretendeu-se, ao optar pelas anteriores distribuições, analisar a estimação dos intervalos de confiança de quantis para dois modelos probabilísticos definidos por diferentes números de parâmetros e frequentemente utilizados na análise de frequência de variáveis hidrológicas, designadamente, quando estão em causa valores extremos.

Os parâmetros das distribuições de probabilidade, tanto das amostras originais ou amostras-base, como das amostras sintéticas decorrentes da técnica de Monte Carlo ou obtidas por re-amostragem, através da técnica de *bootstrap*, foram estimados pelo método dos momentos convencionais. Naghettini e Pinto (2007, cap 6.) descrevem o formalismo matemático envolvido nessa estimação.

#### 3.2. Dados de base

A variável hidrológica aleatória sobre a qual incidiu a análise foi a precipitação diária máxima anual em Portugal Continental, X (mm), para o que foram seleccionados os três postos udométricos identificados

no Quadro 1 através dos respectivos códigos e nomes. Na selecção dos anteriores postos atendeu-se apenas ao facto de possuírem amostras com dimensão apreciável e de não serem geograficamente muito próximos para dar alguma "dimensão" espacial à análise efectuada. As amostras de precipitações diárias máximas anuais foram obtidas através da base electrónica de dados do Sistema Nacional de Informação de Recursos Hídricos - SNIRH

(www.snirh.pt), sendo que, no Quadro 1 e para além da apresentação das amostras em si, se compilaram as características gerais das mesmas, incluindo algumas das estatísticas amostrais.

A análise estatística de cada uma das anteriores amostras de precipitações diárias máximas anuais utilizou as distribuições GEV e de Gumbel, tendo-se concluído que ambas as distribuições apresentavam um bom ajustamento.

**Quadro 1** - Precipitações diárias máximas anuais em três postos udométricos de Portugal Continental. Valores e principais estatísticas amostrais.

Machqueira do Grou (19G/01UG)		Seia (11K/01UG)				Travancas (03N/01G)			
Data	X (mm)	Data	X (mm)	Data	X (mm)	Data	X (mm)	Data	X (mm)
11/4/1955	39,6	12/30/1932	40,4	12/31/1978	53,1	10/5/1913	39,0	1/2/1963	45,2
2/16/1957	29,8	3/11/1934	52,0	10/15/1979	51,0	12/10/1914	48,2	2/16/1964	50,5
11/5/1957	46,4	12/8/1934	56,0	4/10/1981	55,0	12/3/1915	26,4	9/29/1965	61,1
1/22/1959	55,0	12/20/1935	67,0	10/5/1981	74,0	5/18/1917	40,6	2/9/1966	55,2
5/14/1960	60,0	1/26/1937	80,0	12/16/1983	36,0	9/23/1918	24,4	10/25/1966	81,5
11/21/1960	52,0	12/6/1937	61,6	11/16/1984	43,5	11/1/1918	39,2	9/22/1968	48,0
4/27/1962	41,6	9/28/1939	73,3	9/16/1986	53,0	5/24/1920	35,4	9/12/1969	48,5
2/16/1963	51,0	1/21/1940	64,5	4/3/1987	38,2	9/17/1921	32,0	1/4/1970	76,5
11/12/1963	56,8	11/17/1940	71,2	1/30/1988	40,0	1/29/1922	32,0	4/28/1971	38,2
1/29/1965	35,6	11/9/1941	45,0	10/14/1988	42,3	2/7/1923	54,2	2/2/1972	39,4
10/6/1965	75,7	3/24/1943	54,8	12/21/1989	71,6	2/13/1924	38,2	1/17/1973	46,1
4/18/1968	40,0	4/3/1944	39,2	10/24/1990	37,8	5/23/1925	74,2	9/2/1974	34,2
11/1/1968	54,0	6/16/1945	33,6	3/5/1991	37,8	12/5/1925	45,0	11/14/1974	53,6
1/8/1970	50,0	12/21/1945	78,0	3/31/1992	41,3	1/21/1927	34,2	6/24/1976	37,0
11/25/1970	36,7	2/3/1947	46,0	12/5/1992	38,0	3/23/1928	29,4	1/13/1977	47,6
11/6/1971	76,8	1/29/1948	57,0	1/6/1994	61,5	12/10/1932	26,4	12/6/1977	54,2
12/16/1972	92,8	1/3/1949	120,0	12/31/1994	34,2	3/19/1934	25,0	12/23/1978	45,5
11/6/1973	61,6	9/22/1951	56,0	12/26/1995	76,4	6/24/1935	26,0	10/22/1979	40,1
3/17/1975	48,4	11/17/1951	46,3	3/13/2002	39,0	1/19/1936	31,0	9/26/1981	44,2
7/2/1981	96,0	12/12/1952	35,2	1/3/2003	52,6	3/8/1937	28,0	12/30/1981	60,1
12/30/1981	66,0	10/10/1953	79,2	10/1/2003	36,6	11/24/1937	27,3	8/8/1983	44,5
11/7/1982	48,6	1/18/1955	52,2	10/20/2004	47,8	1/16/1939	50,2	11/9/1983	55,0
11/19/1983	109,0	12/15/1955	65,0	12/2/2005	66,9	2/8/1940	40,4	10/19/1984	57,5
1/22/1985	40,0	2/15/1957	55,8			1/21/1941	47,0	9/14/1986	64,5
9/15/1986	80,0	12/12/1957	46,4			3/14/1942	40,8	12/14/1986	31,4
9/22/1987	36,2	10/4/1958	52,2			9/12/1943	54,2	10/15/1987	48,1
5/6/1988	53,5	6/4/1960	70,0			10/20/1943	89,4	10/14/1988	43,5
10/13/1988	60,0	4/23/1961	87,2			12/17/1944	41,0	11/19/1989	47,0
11/19/1989	58,2	1/2/1962	83,0			12/19/1945	38,6	10/15/1990	45,5

Continuação do **Quadro 1** - Precipitações diárias máximas anuais em três postos udométricos de Portugal Continental. Valores e principais estatísticas amostrais.

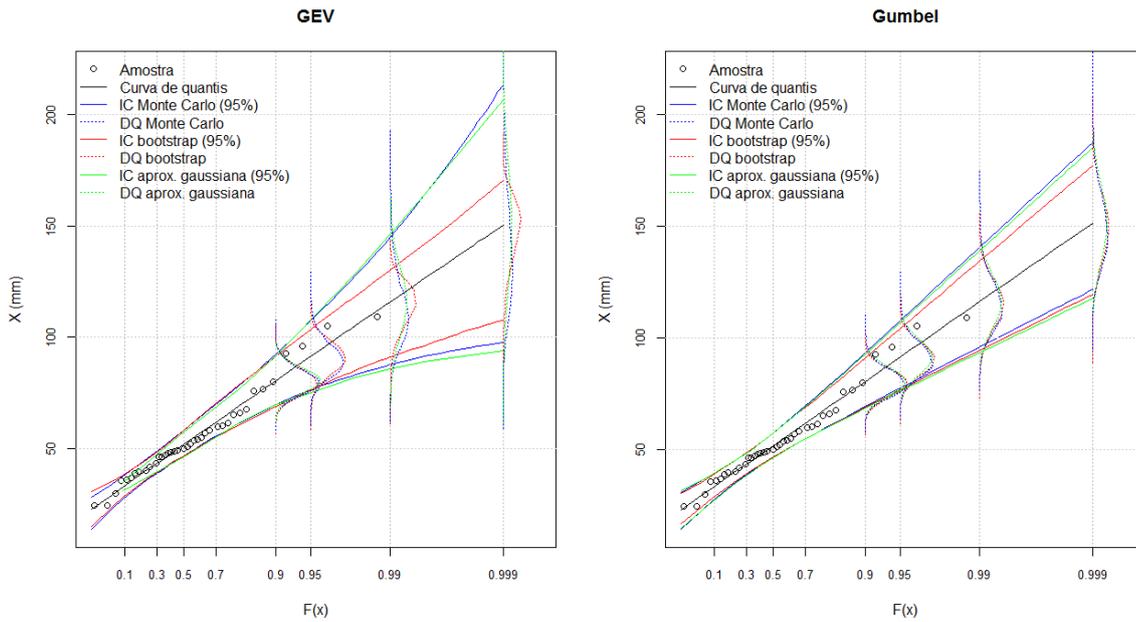
10/18/1990	49,2	2/16/1963	105,0			12/12/1946	29,2	1/9/1992	38,9
10/26/1991	38,8	11/15/1963	79,5			4/21/1948	53,4	12/5/1992	38,6
9/18/1993	47,2	3/13/1965	60,2			12/12/1948	30,0	1/6/1994	42,1
1/6/1994	67,8	1/20/1966	129,2			2/4/1950	54,2	1/1/1995	38,7
2/12/1995	24,5	11/6/1966	82,4			11/14/1950	29,4	1/9/1996	87,4
5/17/1996	65,2	11/4/1967	45,2			1/31/1952	38,4	7/16/1997	39,3
12/18/1996	46,2	3/17/1969	94,3			11/24/1952	26,4	10/19/1997	91,9
11/2/1997	105,2	1/5/1970	68,4			3/16/1954	32,4	9/22/1999	52,1
9/25/1999	48,1	3/18/1971	55,2			8/31/1955	75,2	10/24/1999	51,7
10/20/1999	43,5	2/2/1972	74,3			3/29/1956	68,4	3/2/2001	67,8
10/23/1999	43,5	1/17/1973	74,5			2/5/1957	32,2	9/17/2002	42,7
12/7/2000	60,4	6/28/1974	78,5			4/3/1958	42,0	12/25/2003	47,6
1/23/2002	50,0	2/15/1975	35,1			6/16/1959	54,2	10/20/2004	39,5
12/27/2002	24,7	9/25/1976	45,1			11/20/1959	45,2	10/12/2005	33,8
		1/14/1977	93,5			11/16/1960	48,4	11/20/2007	26,9
		1/28/1978	72,0			4/1/1962	64,8		
Dimensão (a)	43	Dimensão (a)	68			Dimensão (a)	89		
Máximo (mm)	109,0	Máximo (mm)	129,2			Máximo (mm)	91,90		
Mínimo (mm)	24,5	Mínimo (mm)	33,6			Mínimo (mm)	24,40		
Média (mm)	55,0	Média (mm)	60,1			Média (mm)	45,67		
Desvio-padrão (mm)	19,5	Desvio-padrão (mm)	20,5			Desvio-padrão (mm)	14,98		
C. assimetria (-)	1,111	C. assimetria (-)	1,060			C. assimetria (-)	1,109		

## 4. METODOLOGIA E RESULTADOS

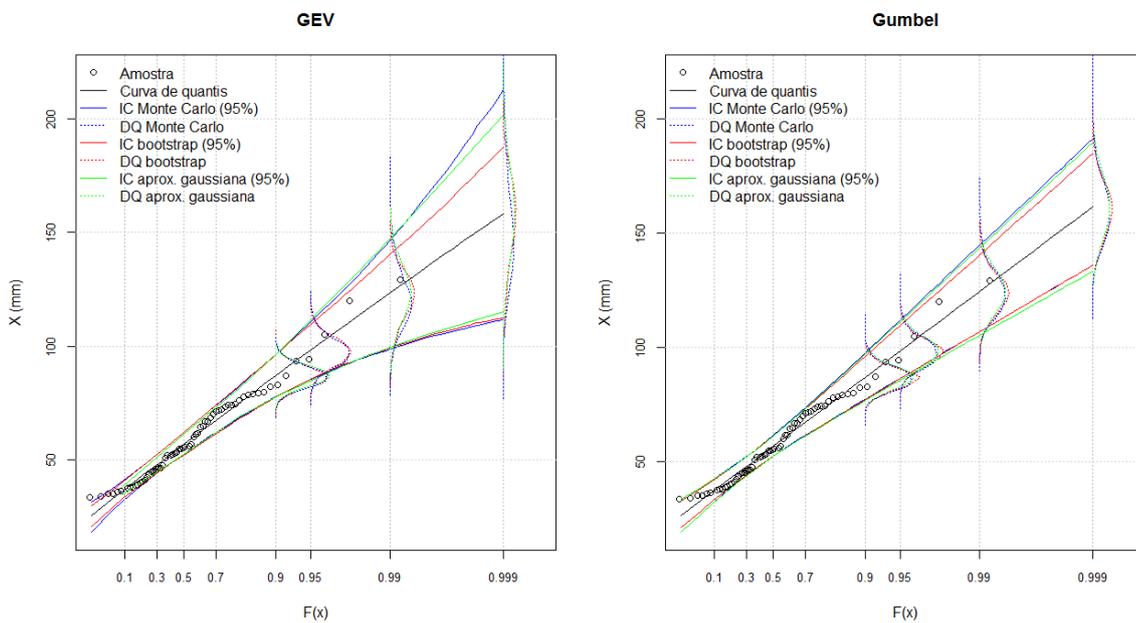
### 4.1. Caracterização prévia do desempenho das diferentes abordagens para a construção de intervalos de confiança de quantis

Para caracterizar previamente o desempenho das três abordagens, descritas no ponto 2, na estimação de intervalos de confiança de quantis fornecidos pelas duas funções de distribuição postuladas, aplicaram-se tais abordagens a cada uma das três amostras de precipitações diárias máximas anuais identificadas no Quadro 1. Obtiveram-se, assim, as Figuras 1 a 3 em que, para cada posto e a par com a representação das curvas dos quantis e dos pontos amostrais, se apresentam as curvas que definem os intervalos de confiança, IC, para o nível de confiança  $100(1-\alpha)=95\%$ , e para probabilidades de não-excedência, F, quasi-contínuas, estimados pela lei GEV (gráfico da esquerda) e pela lei de Gumbel (gráfico da direita). A título de exemplificativo, cada gráfico foi completado

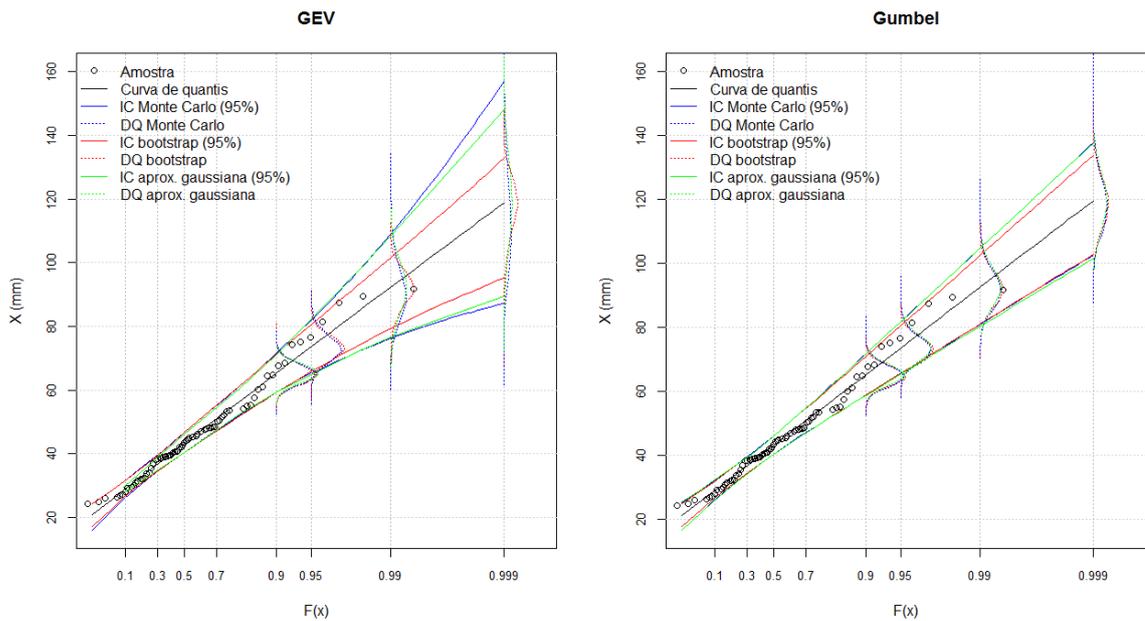
com a representação das curvas de densidades dos quantis  $X_F$  [DQ] decorrentes daquelas abordagens para quatro das probabilidades de não-excedência subjacentes à estimação dos intervalos de confiança, nomeadamente,  $F=0.900$ ,  $F=0.950$ ,  $F=0.990$  e  $F=0.999$ . A posição relativa das curvas de densidade fornece uma indicação quanto à incerteza associada aos estimadores de quantis  $\hat{X}_F$ . Anota-se que as probabilidades empíricas de não-excedência utilizadas para representar os pontos das amostras resultaram da aplicação da fórmula de Gringorten, reconhecida como adequada quando estão em presença leis de extremos. Previamente à avaliação de desempenho relativo dos intervalos de confiança, importa esclarecer que os procedimentos empregues na estimação das curvas densidade de quantis diferiram consoante a técnica utilizada na construção dos intervalos de confiança: no caso da aproximação gaussiana, apoiada na teoria assintótica de distribuições de amostragens, a curva de densidade de quantis relativa a uma dada probabilidade de não-excedência, F, foi descrita pela lei Normal com média igual à da



**Figura 1** – Precipitações diárias máximas anuais em Machuqueira do Grou (N=43 anos). Intervalos de confiança a 95% (IC) estimados utilizando a aproximação gaussiana e as técnicas de Monte Carlo e do *bootstrap*, no pressuposto de aplicação da lei GEV (gráfico da esquerda) e da lei de Gumbel (direita). Curvas de densidade de quantis (DQ) para as probabilidades de não-excedência de 0.900, 0.950, 0.990 e 0.999.



**Figura 2** – Precipitações diárias máximas anuais em Seia (N=68 anos). Intervalos de confiança a 95% (IC) estimados utilizando a aproximação gaussiana e as técnicas de Monte Carlo e do *bootstrap*, no pressuposto de aplicação da lei GEV (gráfico da esquerda) e da lei de Gumbel (direita). Curvas de densidade de quantis (DQ) para as probabilidades de não-excedência de 0.900, 0.950, 0.990 e 0.999.



**Figura 3** – Precipitações diárias máximas anuais em Travancas (N=89 anos). Intervalos de confiança a 95% (IC) estimados utilizando a aproximação gaussiana e as técnicas de Monte Carlo e do *bootstrap*, no pressuposto de aplicação da lei GEV (gráfico da esquerda) e da lei de Gumbel (direita). Curvas de densidade de quantis (DQ) para as probabilidades de não-excedência de 0.900, 0.950, 0.990 e 0.999.

estimativa do quantil para essa probabilidade  $F$ ,  $\hat{x}_F$ , e variância  $S_F^2$ ; no caso das técnicas de Monte Carlo e do *bootstrap*, a obtenção das curvas de densidade de quantis pressupõe a geração/re-amostragem de 5000 amostras sendo que a curva relativa a um dado valor de  $F$  foi estabelecida recorrendo a um estimador *kernel* de densidade (Diggle, 1985) aplicado às 5000 estimativas do quantil  $x_F$  assim obtidas. O estimador *kernel* da função densidade probabilidade,  $f_Y(y)$ , de uma variável aleatória genérica  $Y$ , composta por uma amostra  $\{y_1, y_2, \dots, y_N\}$  de dimensão  $N$ , é dado por:

$$\hat{f}_Y(y) = \frac{1}{Nh} \sum_j^N K\left(\frac{y - y_j}{h}\right) \quad (10)$$

em que  $h$  é um factor de alisamento e  $K$ , uma função *kernel* gaussiana -  $K(z) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-z^2/2)$ . O factor de alisamento foi determinado com recurso a uma regra empírica de Silverman (1986, p.48) formalmente expressa por:

$$h = 0.9 \min \{S_Y, IQR\}^{(-1/5)} \quad (11)$$

em que  $S_Y$  e IQR são, respectivamente, o desvio-padrão e a distância inter-quartis da amostra. Note-se que, nas Figuras 1 a 3, as probabilidades associadas aos valores das curvas de densidade foram amplificadas

de modo a tornar perceptível a forma das curvas, sendo que a cada figura se aplicou um mesmo factor de amplificação para manter o andamento relativo dessas curvas.

Seguidamente enumeram-se as principais ilações sustentadas pelas Figuras 1 a 3.

- i. A incerteza associada à estimação de quantis de uma dada distribuição com um determinado conjunto de parâmetros é tanto maior quanto maior a probabilidade de não-excedência  $F$  desse quantil, consoante exprime o afastamento progressivo para valores crescentes da probabilidade de não-excedência das curvas representativas dos intervalos de confiança.
- ii. Para valores elevados de  $F$ , a incerteza associada à estimação de quantis é maior para a lei GEV (intervalos de confiança com maior amplitude) do que para a lei de Gumbel (intervalos de confiança com menor amplitude) em resultado da incerteza adicional introduzida pela estimação do parâmetro de forma  $\kappa$  daquela primeira lei.
- iii. No caso da lei GEV, para valores elevados de  $F$ , os  $W=5000$  quantis fornecidos pela técnica de *bootstrap* parecem não seguir a lei normal já que as correspondentes curvas de densidade indiciam uma assimetria negativa, por vezes pronunciada.
- iv. Os intervalos de confiança construídos para a lei GEV, segundo a técnica de *bootstrap*, são acentuadamente mais estreitos do que

os decorrentes da aplicação das outras duas técnicas.

- v. Os intervalos de confiança construídos para a lei GEV segundo a aproximação gaussiana e a técnica de Monte Carlo apresentam diferenças moderadas entre si, porém, evidenciando-se à medida que a probabilidade de não-excedência aumenta, sendo que a técnica de Monte Carlo conduz a amplitudes consistentemente superiores.
- vi. No caso da lei de Gumbel, não existem diferenças significativas entre os intervalos de confiança construídos utilizando a aproximação gaussiana e a técnica de Monte Carlo; a técnica de *bootstrap* conduz a intervalos mais estreitos, embora e em termos relativos, não tão estreitos quanto os observados para a lei GEV.
- vii. À medida que a dimensão da amostra aumenta de N=43, em Machuqueira do Grou, para N=68, em Seia, até N=89, em Travancas, diminuem as amplitudes relativas dos intervalos de confiança, segundo qualquer uma das três técnicas aplicadas, reflectindo, assim, as menores flutuações das amostras de maior dimensão; as discrepâncias entre os intervalos de confiança, calculados segundo a técnica de *bootstrap* e as outras duas técnicas, parecem ser relativamente mais acentuadas para amostras de menor dimensão.

#### 4.2. Avaliação quantitativa do desempenho das técnicas de Monte Carlo e de *bootstrap*

Com o intuito de realizar uma avaliação quantitativa do desempenho das técnicas de Monte Carlo e de *bootstrap*, tendo em vista fundamentar uma recomendação sobre a construção de intervalos de confiança de quantis, nomeadamente, no âmbito de estudos hidrológicos, implementou-se o seguinte procedimento.

- i. geração de uma amostra de dimensão muito grande, concretamente com 10000 valores, a partir de uma distribuição progenitora  $F_X(x|\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ , com k parâmetros, que, para tanto, foram arbitrados. Dada a grande dimensão dessa amostra, admite-se que a mesma se equipare à população, P, da variável aleatória X distribuída segundo a lei  $F_X(x|\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ . Em conformidade, considerou-se que o quantil estimado a partir dessa distribuição para a probabilidade de não-excedência F representaria o verdadeiro quantil da população P, o qual, para o efeito, foi designado por  $X_F^P$ ;
- ii. por re-amostragem aleatória da população P, obtenção de B=2000 amostras aleatórias de dimensão N, designadas por X1, X2, ..., XB, em que N é da ordem de grandeza da dimensão das amostras normalmente utilizadas em estudos hidrológicos, a saber, nas aplicações efectuadas, N=40 ou N=80;
- iii. para cada uma das B amostras, aplicação do

método dos momentos convencionais com estimação dos parâmetros  $\theta$  e dos quantis  $\hat{x}_F = F^{-1}(F) = \phi(F)$ , para uma determinada probabilidade de não-excedência, F;

- iv. para cada uma das B amostras, aplicação das diferentes abordagens para a construção de intervalos de confiança de quantis objecto do presente artigo, com estimação dos intervalos de confiança  $IC_{F, [1-\alpha]}$  para o nível de confiança 100 (1- $\alpha$ )=95% associados ao quantil estimado em (iii); para simplificar a notação, designou-se por  $[\lambda_i, \lambda_s]$  o intervalo de confiança associado ao quantil  $X_F$  fornecido por qualquer uma daquelas abordagens;
- v. por simples contagem, determinação, para cada uma das anteriores abordagens, do número de vezes em que o quantil verdadeiro da população P, i.e., o quantil  $X_F^P$  estimado a partir da distribuição progenitora, está contido nos intervalos de confiança obtidos em (iv), ou seja, do número de vezes em que se verifica  $X_F^P \in [\lambda_i, \lambda_s]$ ;
- vi. repetição das etapas (iii) a (v) para diferentes valores da probabilidade de não-excedência, F.

Como critério de apreciação do desempenho relativo das abordagens para construção de intervalos de confiança de quantis, estabeleceu-se que a abordagem mais adequada seria aquela em que a percentagem do número de vezes em que os correspondentes intervalos de confiança contêm o verdadeiro quantil da população fosse a mais elevada e necessariamente próxima do nível de confiança 100 (1- $\alpha$ )%. Tal percentagem foi designada por % ( $X_F^P \in [\lambda_i, \lambda_s]$ ).

Regista-se que a análise de desempenho não incluiu a construção de intervalos de confiança por aproximação gaussiana, pois a complexidade do formalismo matemático envolvido na estimação de  $S_F$  no caso da lei GEV, conferida pelos seus três parâmetros, não se adequa à aplicação "intensiva" pressuposta pelo procedimento implementado. Resultou, assim, que apenas as técnicas de Monte Carlo e de *bootstrap* foram comparadas, em termos relativos.

Para o efeito foram consideradas quatro populações, sendo que se admitiu que as duas primeiras – designadas por P1 e P2 – seguiriam a lei GEV e as restantes duas – identificadas por P3 e P4 –, a lei de Gumbel. Para os parâmetros  $\theta$  das distribuições progenitoras, utilizadas na geração dos 10000 elementos que concretizam cada uma dessas populações, adoptaram-se as estimativas obtidas a partir das amostras de precipitações diárias máximas anuais em Travancas (P1 e P3) e em Seia (P2 e P4) para aquelas funções de distribuição. Como antes mencionado, a partir de cada uma das anteriores populações foram constituídos dois conjuntos de B=2000 amostras aleatórias com dimensão, num conjunto, de N=40 e, no outro conjunto, de N=80.

Em complemento da contagem do número de vezes em que o intervalo de confiança contém o

respectivo quantil da população,  $X_F^P$ , foram também contabilizadas as ocorrências em que tal quantil é maior do que o limite superior do intervalo e menor do que o limite inferior desse intervalo, com o objectivo de averiguar, no caso de o intervalo não conter  $X_F^P$ , se esse quantil “verdadeiro” tende a ser subestimado ou sobrestimado.

Os resultados da contagem levada a cabo (expressos em percentagem) são apresentados no Quadro 2 que, para o efeito, foi organizado por casos, sendo que cada caso corresponde a uma população, associada a uma dimensão N das amostras aleatórias constituídas a partir dessa população e a uma dada probabilidade de não-excedência que identifica o quantil para o qual é estimado o intervalo de confiança. A apreciação do desempenho relativo das técnicas de Monte Carlo e de *bootstrap* é efectuada entre casos. O quadro contém ainda os valores dos parâmetros adoptados para as distribuições progenitoras. No quadro

$\%(X_F^P \in [\lambda_i, \lambda_s])$  designa o número de vezes, expresso em percentagem, em que os verdadeiros quantis estão contidos nos intervalos de confiança; e  $\%(X_F^P > \lambda_s)$  e  $\%(X_F^P < \lambda_i)$  os números de vezes, também expressos em percentagem, em que aqueles quantis excedem os limites superiores e são inferiores aos limites inferiores dos mencionados intervalos, respectivamente.

Como explicitado, considerou-se que um bom desempenho no cálculo dos intervalos de confiança associados a quantis corresponderia a um valor de  $\%(X_F^P \in [\lambda_i, \lambda_s])$  muito próximo do nível de confiança adoptado, ou seja, mas aplicações efectuadas, muito próximo de 95%. Em conformidade e para cada caso, foi destacado a negrito o mais elevado valor daquela percentagem, observando-se que estão em causa sempre percentagens próximas de 95%. Adicionalmente e atendendo a que, desejavelmente, se esperam percentagens  $\%(X_F^P > \lambda_s)$  e  $\%(X_F^P < \lambda_i)$  muito próximas de zero, destacaram-se também para cada

**Quadro 2** – Avaliação do desempenho das técnicas de Monte Carlo e de *bootstrap* para a construção de intervalos de confiança de quantis: resultados da aplicação do procedimento descrito a quatro populações.

		População P1: GEV com $\beta=38.94$ , $\alpha=11.76$ , $\kappa=0.0051$								População P2: GEV com $\beta=50.93$ , $\alpha=16.30$ , $\kappa=0.0136$							
		N=40				N=80				N=40				N=80			
		F=0.900	F=0.950	F=0.990	F=0.999	F=0.900	F=0.950	F=0.990	F=0.999	F=0.900	F=0.950	F=0.990	F=0.999	F=0.900	F=0.950	F=0.990	F=0.999
Monte Carlo	$\%(X_F > \lambda_s)$	<b>7,05</b>	<b>11,25</b>	<b>15,00</b>	<b>16,05</b>	<b>4,10</b>	<b>6,25</b>	<b>8,80</b>	<b>10,35</b>	<b>7,65</b>	<b>11,40</b>	<b>16,20</b>	<b>17,25</b>	<b>6,05</b>	<b>8,25</b>	<b>11,60</b>	<b>13,45</b>
	$\%(X_F < \lambda_i)$	1,90	0,80	0,00	<b>0,00</b>	2,15	<b>1,00</b>	<b>0,05</b>	<b>0,00</b>	0,95	<b>0,40</b>	<b>0,00</b>	<b>0,00</b>	1,40	<b>0,50</b>	<b>0,00</b>	<b>0,00</b>
	$\%(X_F \in [l_i, l_s])$	<b>91,05</b>	<b>87,95</b>	<b>85,00</b>	<b>83,95</b>	<b>93,75</b>	<b>92,75</b>	<b>91,15</b>	<b>89,65</b>	<b>91,40</b>	<b>88,20</b>	<b>83,80</b>	<b>82,75</b>	<b>92,55</b>	<b>91,25</b>	<b>88,40</b>	<b>86,55</b>
Bootstrap	$\%(X_F > \lambda_s)$	9,10	15,40	25,95	32,15	4,65	8,15	16,10	20,50	9,45	15,80	29,15	35,65	6,80	11,05	20,75	26,05
	$\%(X_F < \lambda_i)$	<b>1,55</b>	1,00	0,40	0,20	<b>1,65</b>	1,10	0,55	0,60	<b>0,75</b>	<b>0,40</b>	0,10	0,10	<b>1,20</b>	0,75	0,25	0,05
	$\%(X_F \in [l_i, l_s])$	89,35	83,60	73,65	67,65	93,70	90,75	83,35	78,90	89,80	83,80	70,75	64,25	92,00	88,20	79,00	73,90
		População P3: Gumbel com $\beta=38.92$ , $\alpha=11.68$								População P4: Gumbel com $\beta=50.87$ , $\alpha=16.02$							
		N=40				N=80				N=40				N=80			
		F=0.900	F=0.950	F=0.990	F=0.999	F=0.900	F=0.950	F=0.990	F=0.999	F=0.900	F=0.950	F=0.990	F=0.999	F=0.900	F=0.950	F=0.990	F=0.999
Monte Carlo	$\%(X_F > \lambda_s)$	<b>4,60</b>	<b>4,25</b>	<b>4,30</b>	<b>4,35</b>	<b>4,65</b>	<b>4,60</b>	<b>4,65</b>	<b>4,50</b>	<b>3,80</b>	<b>3,90</b>	<b>3,85</b>	<b>3,75</b>	<b>4,10</b>	<b>3,65</b>	<b>3,50</b>	<b>3,30</b>
	$\%(X_F < \lambda_i)$	<b>0,45</b>	<b>0,45</b>	0,45	0,60	<b>0,35</b>	0,40	0,60	0,50	1,30	1,25	1,35	1,15	1,75	1,80	1,70	1,75
	$\%(X_F \in [l_i, l_s])$	<b>94,95</b>	<b>95,30</b>	<b>95,25</b>	<b>95,05</b>	<b>95,00</b>	<b>95,00</b>	<b>94,75</b>	<b>95,00</b>	<b>94,90</b>	<b>94,85</b>	<b>94,80</b>	<b>95,10</b>	<b>94,15</b>	<b>94,55</b>	<b>94,80</b>	<b>94,95</b>
Bootstrap	$\%(X_F > \lambda_s)$	12,65	14,15	15,60	16,65	10,65	11,70	13,05	13,40	10,40	11,65	12,80	13,05	7,65	8,25	9,15	9,10
	$\%(X_F < \lambda_i)$	0,60	0,55	<b>0,35</b>	<b>0,45</b>	0,45	<b>0,35</b>	<b>0,35</b>	<b>0,30</b>	<b>0,70</b>	<b>0,60</b>	<b>0,50</b>	<b>0,45</b>	<b>1,10</b>	<b>0,90</b>	<b>0,90</b>	<b>0,95</b>
	$\%(X_F \in [l_i, l_s])$	86,75	85,30	84,05	82,90	88,90	87,95	86,60	86,30	88,90	87,75	86,70	86,50	91,25	90,85	89,95	89,95

caso os menores valores destas duas percentagens. Em termos globais, os resultados de  $\%(X_F^P \in [\lambda_i, \lambda_s])$  apresentados no Quadro 2 sugerem que, para todas as populações analisadas, a técnica de simulação de Monte Carlo seja a mais indicada para a construção de intervalos de confiança de quantis (portanto, tanto da distribuição GEV, como da de Gumbel), em detrimento da técnica de re-amostragem *bootstrap* pois conduz a percentagens do número de intervalos de confiança que compreendem o quantil  $X_F^P$  consistente e sistematicamente superiores às associadas ao *bootstrap* e mais próximas de 100  $(1-\alpha)\%$ . Não se pode deixar contudo de assinalar uma singularidade associada àquela técnica, e que não ocorre na de *bootstrap*, e que respeita ao facto de o seu desempenho nem sempre melhorar com o aumento da dimensão N (vide população P4), o que, de algum modo, contraria as expectativas iniciais e que necessariamente carece de investigação adicional, no sentido de apurar se se está ou não perante uma ocorrência fortuita, por exemplo, decorrente do número de réplicas ( $B=2000$ ) não ter sido suficientemente grande.

Da comparação entre valores de  $\%(X_F^P \in [\lambda_i, \lambda_s])$  referentes às populações, por um lado, P1 e P3 e, por outro lado, P2 e P4 concluiu-se que a técnica de Monte Carlo tem um desempenho melhor quando aplicada à construção de intervalos de confiança de quantis da lei de Gumbel.

Para esta lei e para as populações P3 e P4 os valores de  $\%(X_F^P \in [\lambda_i, \lambda_s])$  associados à técnica de Monte Carlo aproximam-se bastante do intervalo de confiança especificado, de  $100(1-\alpha)=95\%$ , sendo que tal não se verifica nos resultados referentes à técnica de *bootstrap*. No que concerne à lei GEV associada às populações P1 e P2 e às mais elevadas probabilidades de não-excedência de 0.990 e 0.999, é ainda mais nítido o melhor desempenho relativo da técnica de Monte Carlo, embora os valores de  $\%(X_F^P \in [\lambda_i, \lambda_s])$  sejam sistematicamente inferiores ao valor de  $100(1-\alpha)=95\%$  adoptado para o nível confiança, indicando uma aparente subestimação das incertezas oriundas do processo de estimação a partir de amostras finitas. Estas discrepâncias relativas diminuem para as amostras de maior dimensão.

Verifica-se ainda que, de acordo com os resultados do Quadro 2, dos casos em que os intervalos de confiança não compreendem  $X_F^P$ , são mais frequentes os intervalos tais que  $X_F^P > \lambda_s$ , ou seja, que subestimam o quantil  $X_F^P$ , do que os que o sobrestimam. Tal é evidenciado pelas percentagens  $\%(X_F^P > \lambda_s)$ , que são sistematicamente superiores às percentagens  $\%(X_F^P < \lambda_i)$ .

Por fim, menciona-se que a técnica de *bootstrap* conduz mais frequentemente a menores valores de  $\%(X_F^P < \lambda_i)$ , circunstância que, contudo, não se considerou muito relevante em termos de desempenho relativo das técnicas de construção de intervalos de confiança de quantis em comparação.

## 5. CONCLUSÕES

Foram apresentadas três abordagens para a construção de intervalos de confiança de quantis de variáveis hidrológicas: (i) aproximação pela lei Normal, ou gaussiana, dos quantis em torno das estimativas; (ii) a técnica de simulação de Monte Carlo; e (iii) a técnica de re-amostragem *bootstrap*. As três abordagens foram aplicadas à construção de intervalos de confiança de quantis das leis generalizadas de valores extremos (GEV, três parâmetros) e de Gumbel (dois parâmetros), com base em dados de precipitações diárias máximas anuais em três postos udométricos de Portugal Continental.

Verificou-se que, independentemente da abordagem utilizada na mencionada construção, os intervalos de confiança de quantis para valores elevados da probabilidade de não-excedência são mais amplos no caso da lei GEV do que no da lei de Gumbel, devido ao acréscimo de incerteza introduzido pelo terceiro parâmetro daquela primeira distribuição. Verificou-se, também, que os intervalos de confiança construídos pela técnica de *bootstrap* têm menor amplitude do que os construídos, tanto por aproximação gaussiana, como pela técnica de Monte Carlo. Admite-se que para a menor amplitude dos intervalos de confiança decorrentes da técnica de *bootstrap* possa contribuir o facto de tal técnica restringir as realizações de qualquer amostra replicada aos valores da amostra original, sendo que a técnica de Monte Carlo pode conduzir a realizações para além (superiores ou inferiores) das presentes naquela amostra. Em termos relativos, a redução da amplitude é muito mais notória no caso da lei GEV do que no da de Gumbel.

Com o objectivo de avaliar quantitativamente os desempenhos relativos das técnicas de Monte Carlo e de *bootstrap*, concebeu-se e implementou-se um procedimento computacionalmente intensivo baseado na apreciação da frequência com que os intervalos de confiança contêm os respectivos quantis populacionais. De acordo com os resultados assim obtidos, recomenda-se a utilização da técnica de Monte Carlo para a construção de intervalos de quantis das distribuições que foram objecto de estudo, em detrimento da técnica *bootstrap*, embora seja de notar que no caso da GEV as estimativas dos intervalos merecem uma interpretação cuidada, uma vez que se verificou que os intervalos assim obtidos tendem a subestimar a incerteza associada às estimativas dos quantis. A anterior recomendação tem um carácter necessariamente preliminar uma vez que decorreu apenas de uns escassos casos de estudo.

Em termos de investigação futura, recomenda-se a aplicação do procedimento de apreciação do desempenho relativo dos diferentes métodos de construção de intervalos de confiança de quantis a outras amostras a fim de verificar se os resultados que assim se venham a obter são consonantes com os apresentados neste artigo. Tal aplicação deverá também incluir a

aproximação gaussiana. Recomenda-se, também, a realização de uma comparação formal entre as técnicas analisadas e variantes da técnica de *bootstrap* não abordadas nesta investigação, tais como o *bootstrap* com aproximação Gaussiana (*Gaussian approximation bootstrap*), o *bootstrap* studentizado (*bootstrap-t*) e o *bootstrap* acelerado e com correção de viés (*bias-corrected and accelerated bootstrap*,  $BC_a$ ). Por fim, julga-se ser de investigar o efeito da aplicação de métodos alternativos para a estimação de parâmetros, tais como os métodos da máxima verosimilhança e dos momentos-L, na incerteza associada às estimativas dos quantis obtidas por análise de frequência de variáveis hidrológicas.

## BIBLIOGRAFIA

CRAMÉR, H. (1946). *Mathematical Methods of Statistics*. Princeton: Princeton University Press.

DIGGLE, P. (1985). A kernel method for smoothing point process data. *Journal of the Royal Statistical Society*, 34(2), 138-147.

EFRON, B. (1979). Bootstrap methods: another look at the jack-knife. *Annals of Statistics*, 7, 1-26, 1979.

HALL, M. J., van den BOOGARD H. F. P., FERNANDO R. C. e MYNET, A. E. (2004). The construction of confidence intervals for frequency analysis using resampling techniques. *Hydrology and Earth System Sciences*, 8(2), 235-246.

HOSKING J. R. M. (1986). The theory of probability weighted moments. Research Report RC 12210. Yorktown Heights (NY): IBM Research.

KACZMAREK, Z. (1957). Efficiency of the estimation of floods with a given return period. IAHS Publication 45, Vol 3, 144-159.

KIDSON R. e RICHARDS K. S. (2005). Flood frequency analysis: assumptions and alternatives. *Progress in Physical Geography*, 29(3), 392-410.

KITE, G. W. (1977). *Frequency and Risk Analysis in Hydrology*. Fort Collins (CO): Water Resources Publications, 1977.

MEYLAN, P., FAVRE A. C. e MUSY, A. (2008). *Hydrologie Fréquentielle – Une Science Prédictive*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne (Suíça).

NAGHETTINI, M. e PINTO, E. J. A. (2007). *Hidrologia Estatística*. Ed. CPRM, Belo Horizonte (Brasil).

RAO, A. R. e HAMED, K. H. (2000). *Flood Frequency Analysis*. Boca Raton (FL): CRC Press.

RAO, C. R. (1973). *Linear Statistical Inference and its Applications*. New York: John Wiley & Sons.

SILVERMAN, B. (1988). *Density estimation for statistics and data analysis*, vol. 26, Chapman & Hall/CRC.

STEDINGER, J. R., VOGEL, R. M. e FOUFOULA-GEORGIU, E. (1993). Frequency Analysis of Extreme Events, capítulo 18 in *Handbook of Hydrology*, MAIDMENT, D. R. (ed.), New York: McGraw-Hill.