

ANÁLISE DE FREQUÊNCIA DE MÁXIMOS ANUAIS BASEADA EM SÉRIES DE DURAÇÃO PARCIAL. COMBINAÇÃO DAS DISTRIBUIÇÕES DE POISSON INFLACIONADA DE ZEROS E GENERALIZADA DE PARETO, MODELO ZIP-GP

THE PEAK-OVER-THRESHOLD APPROACH APPLIED TO THE FLOOD FREQUENCY ANALYSIS OF ANNUAL MAXIMUM DISCHARGES. A COMBINED MODEL OF ZERO-INFLATED POISSON (ZIP) AND GENERALIZED PARETO DISTRIBUTIONS

Artur Tiago SILVA

Instituto Superior Técnico, Lisboa, Portugal

Maria Manuela PORTELA

Instituto Superior Técnico, Lisboa, Portugal

Mauro NAGHETTINI

Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brasil

RESUMO: Na análise de frequência de extremos hidrológicos com recurso a séries de duração parcial, utiliza-se frequentemente um procedimento baseado na modelação do número de excedências relativas a um dado limiar (ou seja, do número de picos) pela distribuição de Poisson e da magnitude dessas excedências pela lei Generalizada de Pareto (GP) – modelo Poisson-GP. Tal modelo requer que seja validada a hipótese de que o número anual picos apresenta uma distribuição de Poisson, a qual, contudo, nem sempre se verifica em termos práticos. O presente artigo analisa uma distribuição alternativa para modelar o número anual de excedências, nomeadamente, o modelo distributivo ZIP (*zero-inflated Poisson*), de dois parâmetros. Adicionalmente, apresenta-se o formalismo resultante da combinação das distribuições ZIP e GP – modelo ZIP-GP – para análise de frequência de magnitudes máximas anuais apoiada em séries de duração parcial. Este último modelo é menos restritivo do que o de Poisson-GP, uma vez que propicia uma descrição mais precisa do processo de ocorrência de cheias a partir de séries de duração parcial, designadamente, quando a fracção de anos sem picos excede a massa teórica no ponto zero da distribuição de Poisson. O artigo contém um exemplo de aplicação do modelo ZIP-GP à análise da magnitude de cheias baseada em registos de caudais médios diários acima de dado limiar, incluindo a avaliação do desempenho de tal modelo relativamente ao modelo Poisson-GP. Os resultados alcançados evidenciam a superioridade do modelo ZIP-GP, principalmente para os menores quantis, e, conseqüentemente, validam a distribuição ZIP como alternativa à distribuição Poisson para modelar a distribuição dos picos anuais numa abordagem baseada em séries de duração parcial.

Palavras-chave: Análise de frequência de extremos, séries de duração parcial, distribuição de Poisson inflacionada de zeros, distribuição generalizada de Pareto.

ABSTRACT: In frequency analysis of hydrological extremes under a peaks-over-threshold (POT) approach, the model with Poisson arrival counts and Generalized Pareto (GP) distributed exceedances – Poisson-GP model is widely used. Such model requires the validation of the hypothesis that the distribution of the annual number of extreme events may be described by a Poisson distribution (Poisson hypothesis), which is not always verifiable in practical terms. The present study concerns the use of an alternative distribution for modeling the annual number of hydrological extremes – the Zero-Inflated Poisson (ZIP) distribution with two parameters. A ZIP-GP model for extreme frequency analysis is proposed. This model is less restrictive than the Poisson-GP model since it allows for a more accurate description of the occurrence process in a POT framework if the fraction of years with no exceedances is significantly higher than the theoretical mass at zero of the Poisson distribution. An application of the ZIP-GP model to flood data from Northern Portugal and the evaluation of its performance relative to the Poisson-GP model is presented. The results show that the ZIP-GP model outperforms the Poisson-GP model, especially for lower quantiles, hence the ZIP distribution is a valid alternative to the Poisson distribution for modeling the annual occurrence counts of peaks in a POT approach for flood frequency analysis.

Keywords: Frequency analysis of hydrological extremes, peaks-over-threshold, zero-inflated Poisson distribution, generalized Pareto distribution.

1. INTRODUÇÃO

A análise de acontecimentos hidrológicos extremos utiliza frequentemente a técnica de amostragem designada por séries de duração parcial, SDP, ou de picos acima de um limiar (*peaks over thresholds*, POT, na nomenclatura Inglesa), a qual consiste em reter, de uma série hidrológica temporalmente contínua, os “picos” ou excedências acima de determinado limiar ou *threshold*, u , desde que se se verifiquem certos pressupostos (Silva *et al.*, 2012). Relativamente à amostragem baseada em séries de máximos anuais, SMA (*annual maximum series*, AMS), resulta, assim, o aumento do conteúdo informativo das amostras, aspecto particularmente relevante quando em presença de amostras de reduzida dimensão. De entre as mais importantes contribuições pioneiras para o desenvolvimento sistemático da técnica em menção no âmbito da hidrologia salientam-se os trabalhos de Shane e Lynn (1964), Todorovic e Zelenhasic (1970), Pickands (1975), Cunnane (1979), North (1980), Tavares e Silva (1983) e Davison e Smith (1990).

O segundo teorema da teoria de valores extremos ou teorema de Pickands-Balkema-de Haan (Balkema e de Haan, 1974; Pickands, 1975) – de acordo com o qual a cauda superior assintótica de uma variável aleatória X pertence à família de distribuições sintetizada pela distribuição Generalizada de Pareto, GP – tem resultado na ampla utilização desta distribuição como modelo probabilístico da magnitude das excedências acima de um limiar, ou seja, tendo por base SDP. A função distribuição de probabilidades, FDP, da GP, $G(x)$, é dada por

$$G(x) = \begin{cases} 1 - \left[1 - \kappa \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right]^{\frac{1}{\kappa}}, & \kappa \neq 0, x \geq \mu \\ 1 - \exp \left(-\frac{x - \mu}{\sigma} \right), & \kappa = 0, x \geq \mu \end{cases} \quad (1)$$

em que k , σ e μ representam os parâmetros de forma, de escala e de posição, este último, igual ao limiar u utilizado na definição dos “picos”. A distribuição GP reduz-se à exponencial quando $k=0$. Se a frequência temporal com que os “picos” ocorrem puder ser descrita por um processo homogêneo de Poisson,

com parâmetro λ igual ao número anual médio de ocorrências acima do limiar, a função de distribuição dos valores máximos anuais, $F(x)$, será dada por (Davison e Smith, 1990)

$$F(x) = \exp \left\{ -\lambda \left[1 - G(x) \right] \right\} \quad (2)$$

Combinando as equações (1) e (2) resulta para o modelo Poisson-GP para análise de frequência das magnitudes máximas anuais analisadas tendo por base SDP

$$F(x) = \begin{cases} \exp \left\{ -\lambda \left[1 - \kappa \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right]^{\frac{1}{\kappa}} \right\}, & \kappa \neq 0, x \geq \mu \\ \exp \left[-\lambda \exp \left(-\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right], & \kappa = 0, x \geq \mu \end{cases} \quad (3)$$

A anterior equação representa a forma analítica da distribuição Generalizada de Valores Extremos, GEV, incluindo o caso particular da distribuição de valores extremos do tipo 1, ou EV1 ou Gumbel, para $k=0$. Tal resultado está de acordo com o primeiro teorema da teoria de valores extremos ou teorema de Fisher-Tippett-Gnedenko (Fisher e Tippett, 1928; Gnedenko, 1943), segundo o qual a distribuição do máximo anual de uma variável aleatória é de um dos três tipos particulares da distribuição GEV, consoante o parâmetro k é nulo, negativo ou positivo.

Não obstante o esquema Poisson-GP aplicado a séries de duração parcial constituir uma alternativa válida e útil à análise convencional baseada em séries de máximos anuais, tal esquema exige a validação da hipótese de que o número anual de excedências segue lei de Poisson. Cunnane (1979) propôs um teste para verificação dessa hipótese, com base no índice de dispersão, ID, definido pelo quociente entre a variância e a média do número anual observado de excedências (ou seja, do número de picos) sobre o limiar u . O autor em menção aplicou o teste do índice de dispersão aos caudais obtidos em 26 estações hidrométricas da Grã-Bretanha, tendo concluído que o número anual de picos não se ajustava a uma variável de Poisson pelo

O texto deste artigo foi submetido para revisão e possível publicação em setembro de 2013, tendo sido aceite pela Comissão de Editores Científicos Associados em outubro de 2013. Este artigo é parte integrante da *Revista Recursos Hídricos*, Vol. 34, Nº 2, 5-12, novembro de 2013. © APRH, ISSN 0870-1741 | DOI 10.5894/rh34n2-1

facto de a respectiva variância ser significativamente superior à média (índice ID significativamente superior à unidade). Como modelo alternativo, Cunnane (1979) propôs a distribuição Binomial Negativa, BN, que admite maior variância, tendo concluído que o seu emprego também não oferecia resultados plenamente satisfatórios.

Em alternativa aos modelos Poisson e BN, no presente artigo propõe-se a modelação do número anual de excedências relativamente a um dado limiar pela distribuição de Poisson inflacionada de zeros, ZIP (*Zero-Inflated Poisson*) (Silva *et al.*, 2013a). Adicionalmente, apresenta-se o formalismo resultante da combinação das distribuições ZIP e GP – modelo ZIP-GP – para análise de frequência de extremos (magnitudes) máximos anuais tendo por base SDP (Silva *et al.*, 2013a). Este último modelo é menos restritivo do que o de Poisson-GP, uma vez que propicia uma descrição mais precisa do processo de ocorrência de cheias a partir de séries de duração parcial, designadamente, quando a fracção de anos sem picos excede a massa teórica no ponto zero da distribuição Poisson. O artigo prossegue com um exemplo de aplicação do modelo ZIP-GP à análise de cheias baseada em registos de caudais médios diários, compreendendo a avaliação do desempenho de tal modelo relativamente ao modelo Poisson-GP. Os resultados alcançados evidenciam a superioridade do modelo ZIP-GP, principalmente para os menores quantis, e, conseqüentemente, validam a distribuição ZIP como alternativa à distribuição Poisson para modelar a distribuição dos picos anuais numa abordagem baseada em séries de duração parcial.

2. DISTRIBUIÇÃO DE POISSON INFLACIONADA DE ZEROS, ZIP (ZERO-INFLATED POISSON)

A distribuição mais simples para modelar a contagem de dados em tempo contínuo, como seja o número anual de excedências sobre um dado limiar, é a distribuição de Poisson com parâmetro λ e função massa de probabilidade, fmp, dada por

$$P(Y = y) = \exp(-\lambda) \frac{\lambda^y}{y!}, \quad y = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

A distribuição de Poisson inflacionada de zeros, ZIP (*Zero-Inflated Poisson*) combina em si duas componentes, uma, relativa ao acréscimo de massa ou inflação de massa no ponto zero, e, outra, dada

pela distribuição de Poisson, de acordo com a seguinte fmp

$$\begin{cases} P(Y = 0) = \varphi + (1 - \varphi) \exp(-\lambda) \\ P(Y = y) = (1 - \varphi) \exp(-\lambda) \frac{\lambda^y}{y!}, \quad y = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (5)$$

ou

$$P(Y = y) = [\varphi + (1 - \varphi) \exp(-\lambda)]^{I_{\{0\}}(y)} \times \left[(1 - \varphi) \exp(-\lambda) \frac{\lambda^y}{y!} \right]^{1 - I_{\{0\}}(y)} \quad (6)$$

Nas equações (5) e (6), o parâmetro φ representa a inflação de massa no ponto $y=0$ e a função indicatriz $I_{\{0\}}(y)$ é igual a 1, quando $y=0$, e igual a 0, quando $y \neq 0$. A função de verossimilhança da distribuição ZIP é dada por

$$L(\varphi, \lambda | \mathbf{y}) = \prod_{i=1}^n \left\{ [\varphi + (1 - \varphi) \exp(-\lambda)]^{I_{\{0\}}(y_i)} \times \left[(1 - \varphi) \exp(-\lambda) \frac{\lambda^{y_i}}{y_i!} \right]^{1 - I_{\{0\}}(y_i)} \right\} \quad (7)$$

e a função log-verossimilhança, por

$$\begin{aligned} \ell(\varphi, \lambda | \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n & \left\{ I_{\{0\}}(y_i) \ln [\varphi + (1 - \varphi) \exp(-\lambda)] \right. \\ & \left. + [1 - I_{\{0\}}(y_i)] \ln \left[(1 - \varphi) \exp(-\lambda) \frac{\lambda^{y_i}}{y_i!} \right] \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

Os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros φ e λ , $\{\hat{\varphi}, \hat{\lambda}\}$, são obtidos mediante maximização da equação (8).

3. O MODELO ZIP-GP

Tendo por base o pressuposto de a série de duração parcial constituir uma realização de uma variável IID (variável independente e identicamente distribuída), a probabilidade de não-excedência dos máximos anuais, denotados por X_{AM} , pode ser formalmente expressa por

$$P(X_{AM} \leq x) = P(Y = 0) + \sum_{y=1}^{\infty} P \left[\bigcap_{k=1}^y (X_{OT} \leq x) \cap (Y = y) \right] \quad (9)$$

em que a variável aleatória discreta Y respeita ao número anual de ocorrências e X_{OT_k} designa a magnitude do k ésimo “pico” num dado ano. Se as magnitudes X_{OT_k} forem independentes de seus instantes de ocorrência, a equação (9) conduz a

$$P(X_{AM} \leq x) = P(Y=0) + \sum_{y=1}^{\infty} \{P(Y=y)[G(x)]^y\} \quad (10)$$

onde $G(x)$ é a função de distribuição de probabilidade, FDP, da magnitude das excedências relativamente a dado limiar, ou seja, da magnitude dos picos. Sob a hipótese de estacionaridade, os parâmetros φ e λ são considerados constantes ao longo do tempo, sendo que a distribuição de probabilidades da magnitude das excedências relativas ao limiar u , $G(x)$, é também considerada invariante no tempo. Introduzindo em (10) a equação que, em (5), define $P(Y=y)$ resulta, após manipulação algébrica

$$P(X_{AM} \leq x) = \varphi + (1-\varphi) \exp \{-\lambda [1-G(x)]\} \quad (11)$$

Designando, na anterior equação, $P(X_{AM} \leq x)$ por $F(x)$ e substituindo $G(x)$ pela FDP da GP – equação (1) – obtém-se para modelo ZIP-GP para análise de frequência das magnitudes máximas anuais tendo por base SDP

$$F(x) = \begin{cases} \varphi + (1-\varphi) \exp \left\{ -\lambda \left[1 - \kappa \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right) \right]^{\frac{1}{\kappa}} \right\}, & \kappa \neq 0, x \geq \mu \\ \varphi + (1-\varphi) \exp \left[-\lambda \exp \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right) \right], & \kappa = 0, x \geq \mu \end{cases} \quad (12)$$

As correspondentes funções de quantis são dadas por

$$x_F(F) = \begin{cases} \mu + \frac{\sigma}{\kappa} \left\{ 1 - \left[-\frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{F-\varphi}{1-\varphi} \right) \right]^{\kappa} \right\}, & \kappa \neq 0, x \geq \mu \\ \mu - \sigma \ln \left[-\frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{F-\varphi}{1-\varphi} \right) \right], & \kappa = 0, x \geq \mu \end{cases} \quad (13)$$

4. EXEMPLO DE APLICAÇÃO DO MODELO ZIP-GP

A aplicação do modelo ZIP-GP à análise de frequência de cheias é exemplificada com base na amostra de caudais médios diários na estação hidrométrica de Quinta das Laranjeiras [060/03], esquematicamente representada no diagrama cronológico da Figura 1 [Silva *et al.*, 2013a]. A anterior estação insere-se no rio Sabor (bacia hidrográfica do rio Douro), correspondendo-lhe as seguintes coordenadas geográficas: 41.208° N, 7.059° W. A área da respectiva bacia hidrográfica é de 3464 km². Os dados, referentes ao período de 64 anos hidrológicos compreendidos entre 1942/43 e 2005/06, foram obtidos através do Sistema Nacional de Informação de Recursos Hídricos (<http://snirh.pt>).

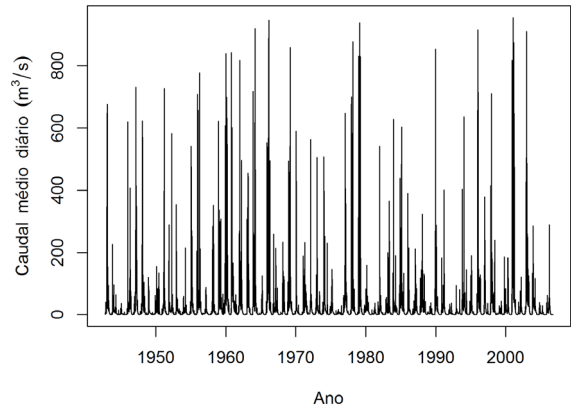


Figura 1 – Diagrama cronológico dos caudais médios diários na estação hidrométrica de Quinta das Laranjeiras [060/03], no rio Sabor (bacia hidrográfica da rio Douro). Período de 64 anos hidrológicos, de 1942/43 a 2005/06, inclusive (adaptada de Silva *et al.*, 2013a).

No que respeita à constituição, a partir dos registos representados na figura precedente, da série de duração parcial a utilizar na análise, de forma a garantir a independência estatística entre os caudais acima de dado limiar, seleccionaram-se picos separados no tempo por um período mínimo de 3 dias. Adicionalmente, impôs-se que a recessão entre cada dois picos consecutivos deveria decrescer até pelo menos 2/3 do valor do primeiro pico [Lang *et al.*, 1999, e Silva *et al.*, 2012].

Um dos impedimentos à mais ampla utilização dos modelos baseados em séries de duração parcial

prende-se com a subjectividade da selecção do limiar, uma vez que não existe uma regra consensual para o efeito. Na aplicação efectuada tal selecção utilizou o procedimento proposto por Davison e Smith, (1990), também aplicado por Silva *et al.*, (2012), baseado na representação gráfica da curva que relaciona a excedência média acima de cada limiar com esse limiar e que na nomenclatura inglesa recebe a designação de *mean excess plot* ou *mean residual life*, MRL, traduzida por *vida remanescente média*, conforme se ilustra na Figura 2b.

Atendendo ao facto de os limites do intervalo de confiança a 95% representados na Figura 2b acomodarem um trecho da função MRL sensivelmente linear para valores de caudais sensivelmente superiores a 300 m³/s, optou-se por seleccionar este caudal para limiar ($u=300$ m³/s), embora não pareça provável uma cauda exponencial, que se traduziria por um patamar horizontal da MRL para limiares superiores ao seleccionado, o que não se verifica. Os limites do intervalo de confiança a 95% foram obtidos no pressuposto de as estimativas das excedências médias acima dos limiares serem aproximadamente normais. O número total de picos assim seleccionados foi de 132, correspondente ao número anual médio de acontecimentos de $\bar{y} = 2.0625$.

A Figura 3a contém a representação do índice de dispersão, ID, em função do limiar, u . Tal figura evidencia ser de rejeitar a hipótese de Poisson para limiares sensivelmente superiores a 100 m³/s (uma vez que os valores de ID são significativamente diferentes de 1), incluindo para o limiar seleccionado de 300 m³/s.

Para comparar o ajuste dos modelos de Poisson e ZIP aos números anuais de ocorrências, Y , para cada caudal adoptado como limiar, aplicou-se o Critério de Informação de Akaike, AIC, conforme proposto por Akaike, (1974), visto as distribuições em comparação terem diferentes números de parâmetros. Para tanto, procedeu-se à representação gráfica, em função do limiar, das diferenças entre os valores do AIC das distribuições de Poisson, $AIC_{Poisson}$, e ZIP, AIC_{ZIP} , conforme se representa na Figura 3b. Atendendo a que, para a quase totalidade dos limiares, incluindo o seleccionado, se verifica que $AIC_{Poisson} > AIC_{ZIP}$, concluiu-se pelo melhor ajustamento do modelo ZIP.

Na Figura 4 são representadas as distribuições empíricas de massa de probabilidade, fmp, e de distribuição de probabilidade, FDP, referentes ao número de picos anuais para $u=300$ m³/s, juntamente com as funções equivalentes resultantes do ajustamento dos modelos de Poisson e ZIP. Tal figura evidencia muito claramente o melhor ajustamento do segundo dos anteriores modelos.

A Figura 5 mostra o ajustamento das distribuições exponencial e GP às magnitudes dos picos, X_{OT_k} , conjuntamente com a representação dos 132 caudais que constituem a SDP, para o que foi utilizado papel de probabilidade exponencial. Conforme antes sugerido pela cauda descendente do gráfico da MRL (Fig. 2b), as magnitudes de cheia não aparentam ser exponencialmente distribuídas. Com efeito, o ajustamento sugere uma cauda superior limitada superiormente, ou seja, com parâmetro de forma k positivo (cauda leve).

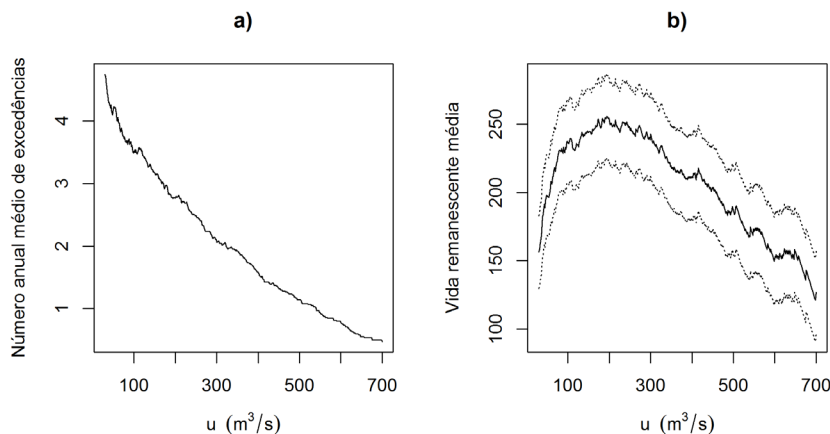


Figura 2 - (a) Número anual médio de excedências em função do limiar, u , e (b) vida remanescente média, MRL, e limites do intervalo de confiança a 95 % (adaptada de Silva *et al.*, 2013a).

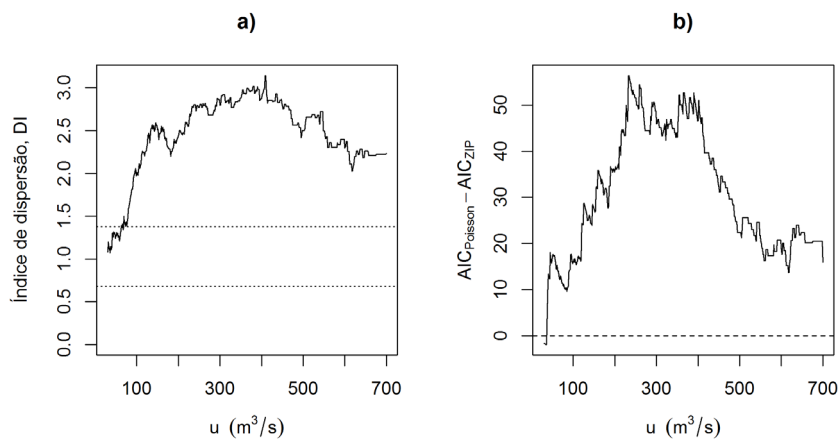


Figura 3 - (a) Índice de dispersão, DI, e (b) diferenças entre os AICs das distribuições de Poisson, $AIC_{Poisson}$, e ZIP, AIC_{ZIP} (adaptada de Silva et al., 2013a).

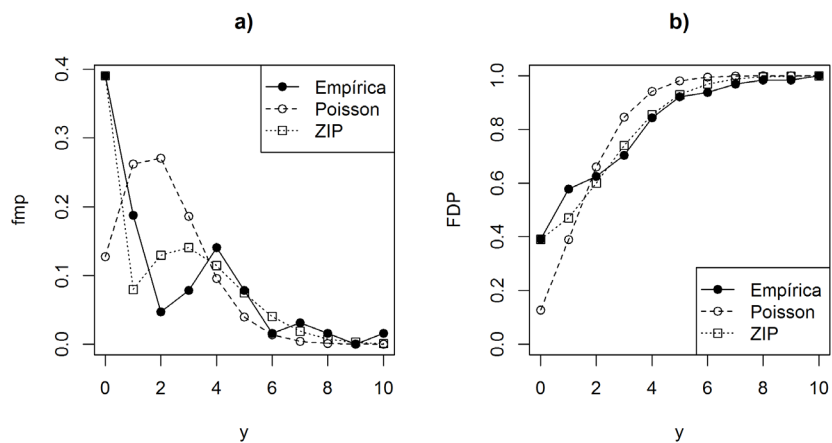


Figura 4 - Distribuição do número de picos anuais acima do limiar de $u=300$ m³/s: (a) funções massa de probabilidade, fmp, empírica, de Poisson e ZIP e (b) correspondentes funções distribuição de probabilidade (adaptada de Silva et al., 2013a).

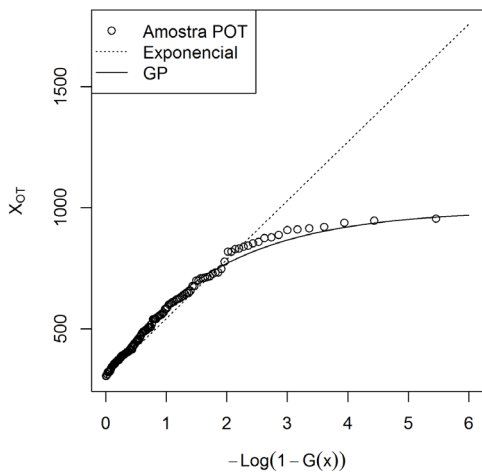


Figura 5 - Ajustamento dos modelos exponencial e GP aos caudais médios diários acima do limiar de $u=300 \text{ m}^3/\text{s}$ (adaptada de Silva et al., 2013a).

Finalmente, a Figura 6 contém a representação gráfica dos modelos completos Poisson-GP e ZIP-GP para caudais médios diários máximos anuais. A figura foi completada com a representação da amostra desses caudais, X_{AMS} , em número de 64, como antes mencionado.

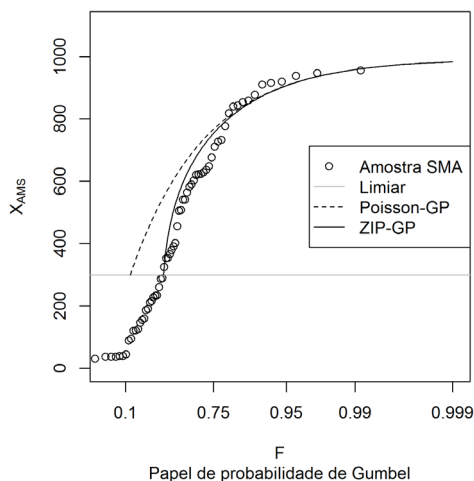


Figura 6 - Ajustamentos dos modelos Poisson-GP e ZIP-GP à amostra de caudais médios diários máximos anuais (adaptada de Silva et al., 2013a).

A anterior figura evidencia que, não obstante os dois modelos praticamente coincidirem para os quantis elevados, o modelo ZIP-GP assegura globalmente um melhor ajustamento aos pontos amostrais, com ênfase para a gama dos menores quantis.

5. PRINCIPAIS CONCLUSÕES E DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

Os resultados apresentados suscitam as seguintes conclusões principais, obviamente restringidas ao único caso de estudo analisado e, como tal, carecendo de generalização:

- No âmbito da análise de frequência de extremos baseada em séries de duração parcial, a distribuição Poisson inflacionada de zeros, ZIP, constitui uma alternativa válida à distribuição de Poisson para modelar o número anual de picos ou de excedências acima de um dado limiar.
- Embora, por regra, o maior interesse da análise de frequência de extremos, nomeadamente visando o estabelecimento de valores de projecto, se concentre na cauda superior (elevadas probabilidades de não excedência, ou seja, elevados períodos de retorno) onde a lei de Poisson aparenta permanecer como modelo válido, a distribuição ZIP oferece um modelo alternativo globalmente mais adequada ao conjunto das observações.
- Não obstante os resultados terem decorrido da consideração de um único limiar, a evidente concordância dos modelos Poisson-GP e ZIP-GP na gama dos elevados quantis documentada na Figura 6 sugere a possibilidade de utilização, para esses quantis, da distribuição de Poisson mesmo quando o índice de dispersão resultar na rejeição da hipótese de Poisson.

Em termos de desenvolvimentos futuros da investigação apresentada, alguns deles já objecto de análises entretanto iniciadas, menciona-se - a par com a necessidade de analisar casos de estudo adicionais, de avaliar o desempenho do modelo ZIP-GP, em termos da quantificação das incertezas dos quantis estimados e de analisar o modelo ZINB (Zero-Inflated Negative Binomial) enquanto alternativa potencialmente válida - o interesse de proceder ao estudo da inclusão de eventuais não-estacionariedades na formulação do modelo ZIP-GP (Silva *et al.*, 2013b), mesmo no pressuposto de magnitudes das excedências, $G(x)$, estacionárias, através da regressão ZIP (Lambert, 1992) entre os números anuais de excedências e co-variáveis, como sejam índices climáticos, entre os quais a Oscilação do Atlântico Norte, NAO (*North Atlantic Oscillation*).

BIBLIOGRAFIA

- Akaike, H., 1974. A new look at the statistical model identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*: 19(6), 716–723.
- Balkema, A., e de Haan, L., 1974. Residual life time at great age. *The Annals of Probability*: 2(5), 792–804.
- Coles, S., 2001. *An introduction to statistical modeling of extreme values*. Springer.
- Cunnane, C., 1979. A note on the Poisson assumption in partial duration series models. *Water Resour. Res.*: 15(2), 489–494.
- Davison, A., e Smith, R., 1990. Models for exceedances over high thresholds. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*: 52(3), 393–442.
- Fisher, R., e Tippett, L., 1928. Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample. In: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 24. Cambridge Univ Press.
- Gnedenko, B., 1943. Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire. *The Annals of Mathematics*: 44(3), 423–453.
- Lambert, D., 1992. Zero-inflated poisson regression, with an application to defects in manufacturing. *Technometrics*: 34(1), 1–14.
- Lang, M., Ouarda, T. B. M. J., e Bobée, B., 1999. Towards operational guidelines for over-threshold modeling. *Journal of Hydrology*, 225(3), 103–117.
- North, M., 1980. Time-dependent stochastic model of floods. *Journal of the Hydraulics Division, ASCE* 106 (HY5), pp. 649–665, 1980.
- Pickands, J., 1975. Statistical inference using extreme order statistics. *The Annals of Statistics*: 3(1), 119–131.
- Shane, R.M., e Lynn, W.R., 1964. Mathematical model for flood risk evaluation. *Journal of the Hydraulics Division, ASCE*, 90 (HY6), 1–20.
- Silva, A.T., Portela, M.M., e Naghettini, M., 2012. Aplicação da técnica das séries de duração parcial à análise de frequência de variáveis hidrológicas aleatórias. *11º Congresso da Água*, 15 pp., Associação Portuguesa dos Recursos Hídricos (APRH), Porto. Portugal
- Silva, A.T., Portela, M.M., e Naghettini, M., 2013a. A Peaks-Over-Threshold (POT) model for floods with Zero-Inflated Poisson (ZIP) arrival. *8th International Conference of EWRA. "Water Resources Management in an Interdisciplinary and Changing Context"*. Oporto. Portugal.
- Silva, A.T., Portela, M.M., e Naghettini, M., 2013b. On peaks-over threshold modeling of floods with non-zero inflated Poisson arrival under stationarity and nonstationarity. *Stochastic Environmental research and Risk Assessment*, doi:10.1007/s00477-013-0813-z.
- Tavares, L.V., e Silva, J.E., 1983. Partial duration series method revisited. *Journal of Hydrology*, 64, pp. 1–14.
- Todorovic, P., e Zelenhasic, E., 1970. A stochastic model for flood analysis. *Water Resources Research*, 6 (6), 1641–1648.